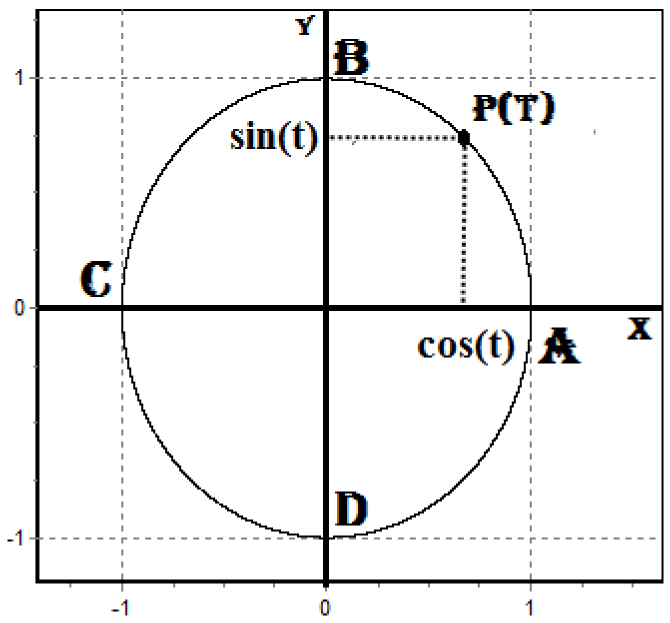
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

Определение.

Ребята, мы знаем что такое ***синус, косинус, тангенс и котангенс***. Давайте посмотрим, можно ли через значения одних тригонометрических функций найти значения других тригонометрических функций.

Определим ***тригонометрическую функцию числового элемента*** как:

y= sin(t), y= cos(t), y= tg(t), y= ctg(t)



Основные формулы.

Вспомним основные формулы:

$$\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$$

Кстати, как называется эта формула?

$$\mathrm{tg}(t)=\frac{\sin(t)}{\cos(t)} \text{ при } t\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$\mathrm{ctg}(t)=\frac{\cos(t)}{\sin(t)} \text{ при } t\neq\pi k$$

Давайте выведем новые формулы

Тригонометрические тождества.

Мы знаем основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$$

Ребята, давайте обе части тождества разделим на $\cos^2(t)$*, получим:*

$$\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}+\frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t)}=\frac{1}{\cos^2(t)}$$

преобразуем его:

$$\left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2(t)}$$

Тогда у нас получается тождество:

$$tg^2(t)+1=\frac{1}{\cos^2(t)} \quad \text{при} \quad t\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$$

Тригонометрические тождества.

Теперь давайте разделим основное тригонометрическое тождество на $sin^2(t)$ *:*

$$\frac{sin^2(t)}{sin^2(t)} + \frac{cos^2(t)}{sin^2(t)} = \frac{1}{sin^2(t)}$$

Давайте так же преобразуем его

$$1 + \left(\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right)^2 = \frac{1}{sin^2(t)}$$

И у нас получается новое тождество, которое стоит запомнить:

$$ctg^2(t) + 1 = \frac{1}{sin^2(t)} \quad \text{при} \quad t \neq \pi k$$

Тригонометрические тождества.

Нам удалось получить две новых формулы:

$$tg^2(t) + 1 = \frac{1}{cos^2(t)} \qquad ctg^2(t) + 1 = \frac{1}{sin^2(t)}$$

$$\mathrm{tg}(t) = \frac{1}{\mathrm{ctg}(t)} \qquad \mathrm{ctg}(t) = \frac{1}{\mathrm{tg}(t)}$$

Запомните их!

Полученные нами формулы используются когда по какому то известному значению тригонометрической функции требуется вычислить значение другой.

Пример 1. Упростить выражение:

а) $1 + \mathrm{tg}^2\, t$; б) $1 + \mathrm{ctg}^2\, t$.

Решение. а) $1 + \mathrm{tg}^2\, t = 1 + \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

б) $1 + \mathrm{ctg}^2\, t = 1 + \dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{1}{\sin^2 t}$.

Пример 2. Известно, что $\sin t = \frac{3}{5}$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Найти соответствующие значения $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Из соотношения $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ находим:

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t.$$

По условию $\sin t = \frac{3}{5}$, значит, $\cos^2 t = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Из уравнения $\cos^2 t = \frac{16}{25}$ находим: $\cos t = \frac{4}{5}$ или $\cos t = -\frac{4}{5}$.

По условию, аргумент t принадлежит первой четверти числовой окружности, а в ней $\cos t > 0$. Значит, из двух найденных возможных соотношений выбираем первое: $\cos t = \frac{4}{5}$.

Зная значения $\sin t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\cos t = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

Пример 3. Известно, что $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти значения $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Воспользуемся соотношением $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

По условию $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$, значит, $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$.

Отсюда находим, что $\cos^2 t = \frac{144}{169}$, значит, $\cos t = \frac{12}{13}$ или $\cos t = -\frac{12}{13}$.

По условию аргумент t принадлежит второй четверти числовой окружности, а в ней $\cos t < 0$. Поэтому из двух указанных выше возможностей выбираем вторую: $\cos t = -\frac{12}{13}$.

Зная значения $\operatorname{tg} t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\sin t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t = \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}; \ \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{12}{5}.$$

Ответ: $\cos t = -\frac{12}{13}$; $\sin t = \frac{5}{13}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{12}{5}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{\cos^2 t} - 1;$

б) $\dfrac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t};$

По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

2. а) $\sin t = \dfrac{4}{5}, \quad \dfrac{\pi}{2} < t < \pi;$

б) $\sin t = \dfrac{5}{13}, \quad 0 < t < \dfrac{\pi}{2};$

3. а) $\operatorname{tg} t = \dfrac{3}{4}, \quad 0 < t < \dfrac{\pi}{2};$

б) $\operatorname{tg} t = 2{,}4, \quad \pi < t < \dfrac{3\pi}{2};$