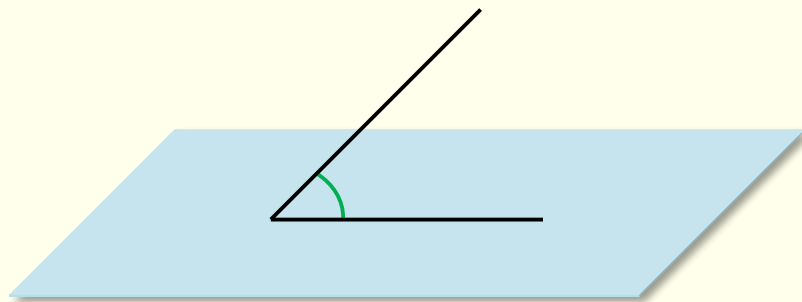
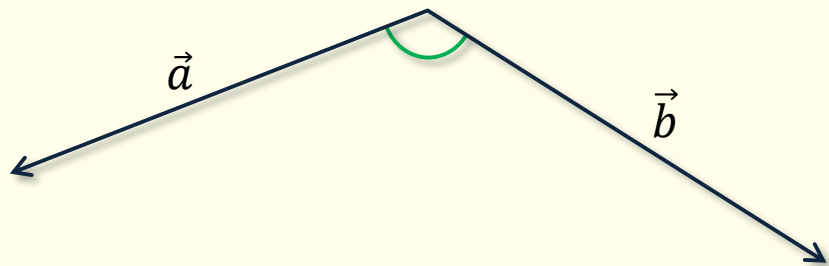
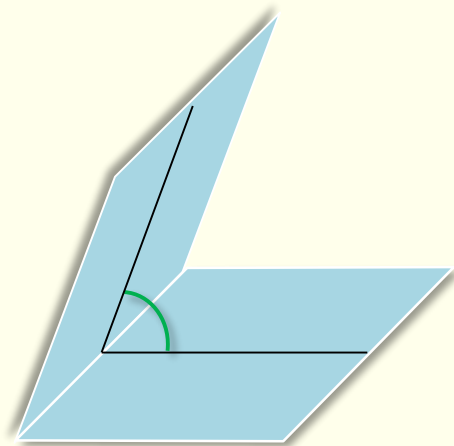
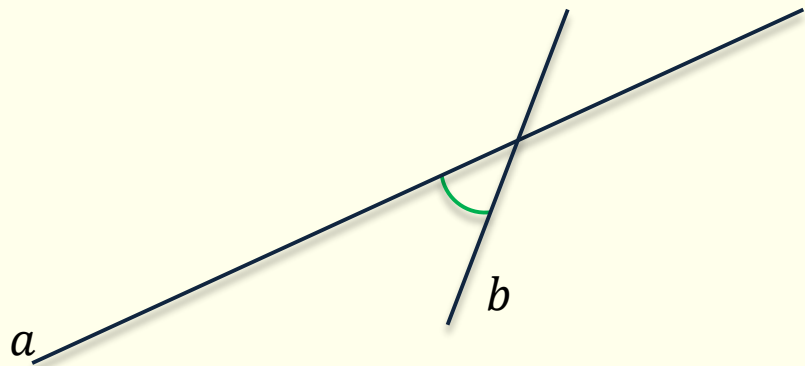
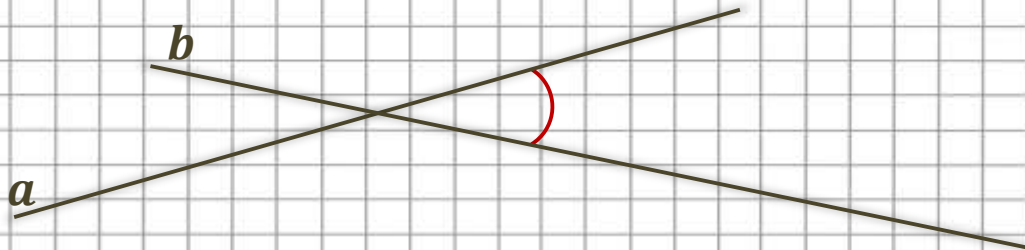


Вычисление углов между прямыми и плоскостями

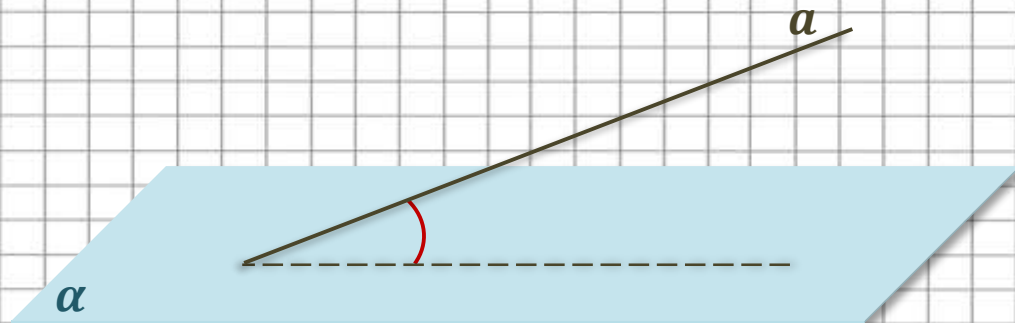


Сегодня на уроке:

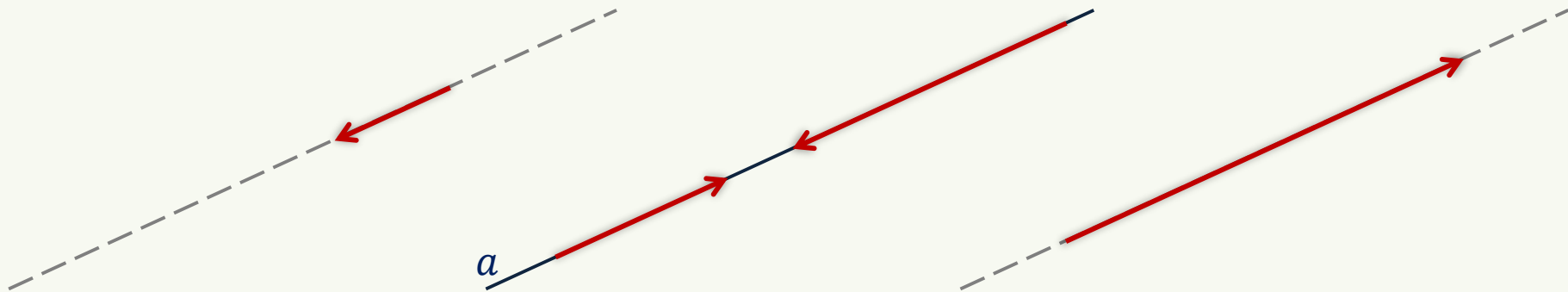
✓ Вычисление угла между прямыми.



✓ Вычисление угла между прямой и плоскостью.



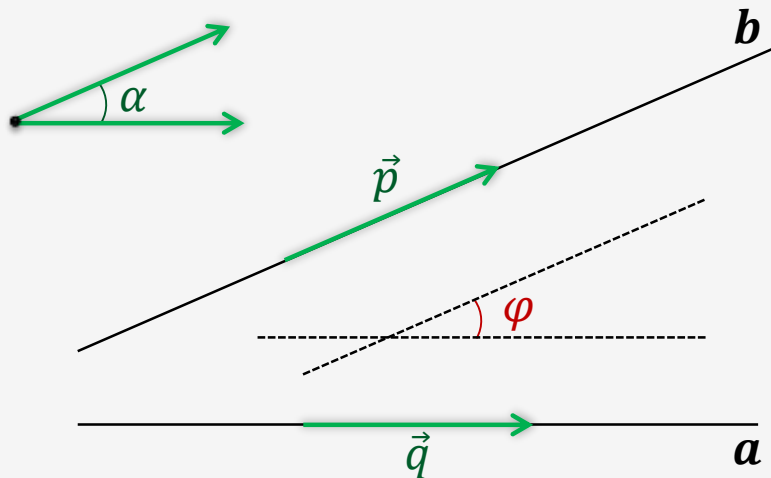
Ненулевой вектор называется **направляющим** вектором прямой a , если он **лежит** либо на прямой a , либо на прямой, параллельной прямой a .



Все направляющие векторы прямой **коллинеарны** друг другу.

✓ Вычисление угла между прямыми.

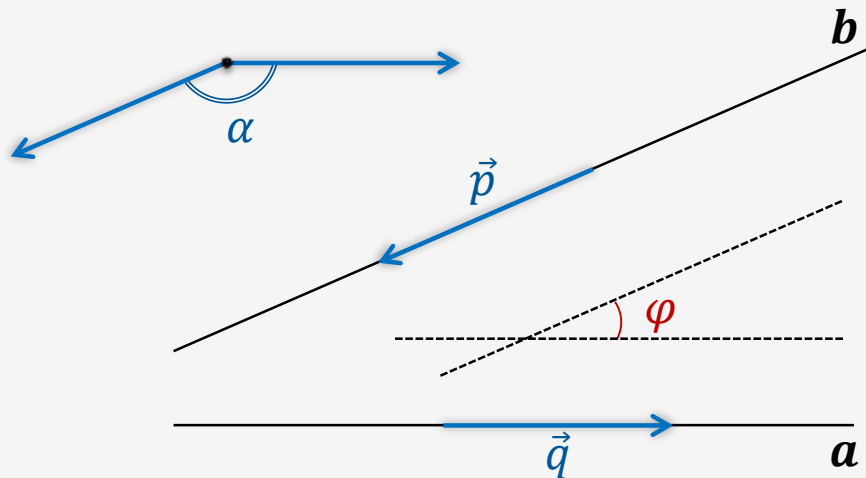
$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$



$$\varphi = \alpha$$

$$\cos \varphi = \cos \alpha$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



$$180^\circ - \alpha$$

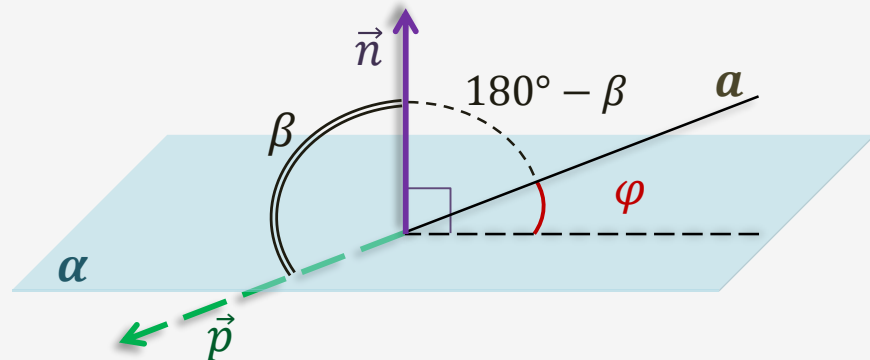
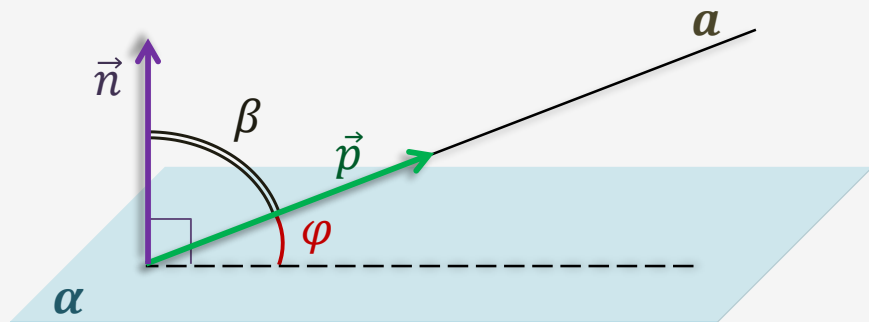
$$\cos \varphi = -\cos \alpha$$

$$\cos \varphi = -\frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

✓ Вычисление угла между прямой и плоскостью.

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$$



$$\varphi + \beta = 90^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\varphi + (180^\circ - \beta) = 90^\circ$$

$$\sin \varphi = \cos \beta$$

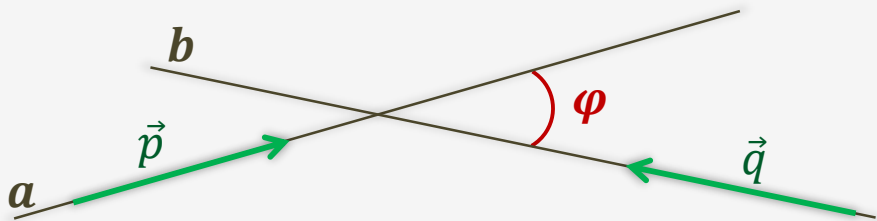
$$\sin \varphi = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$$

$$\sin \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\sin \varphi = -\frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

✓ Вычисление угла между прямыми.

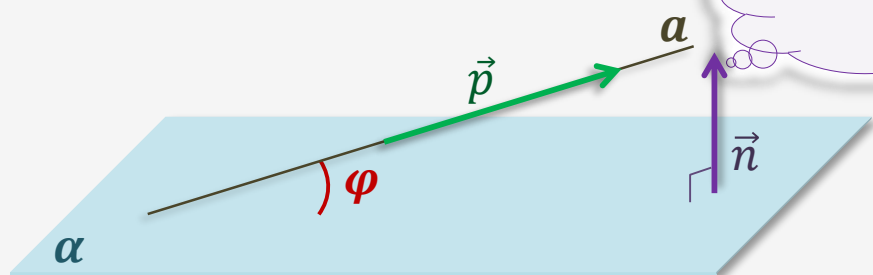
$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$



$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

✓ Вычисление угла между прямой и плоскостью.

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$
 $\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$



нормальный
вектор

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед, где $AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$.

Найти $\angle(BD; CD_1)$ и $\angle(AC; AC_1)$.

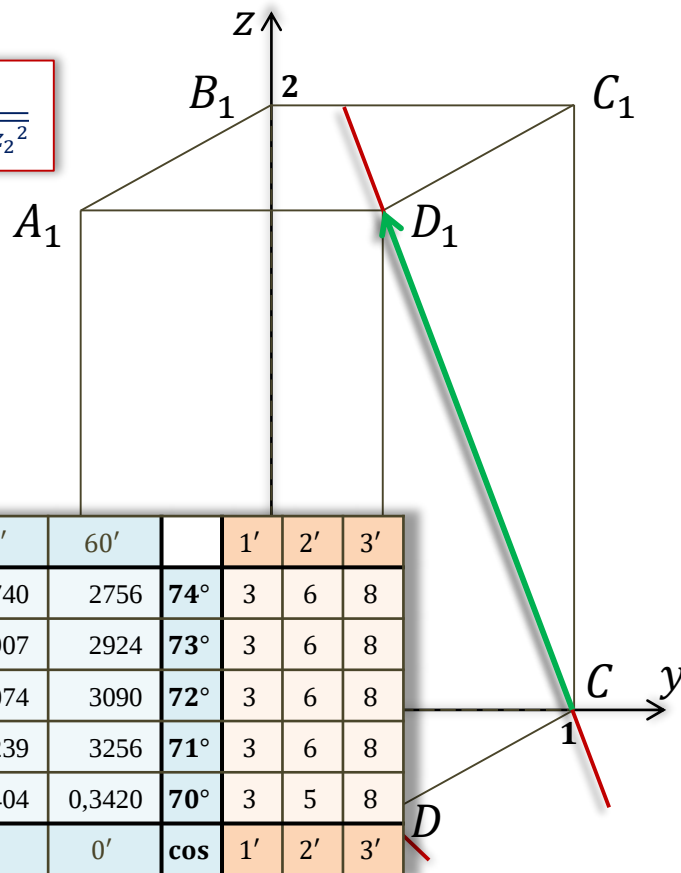
Решение.

$$B(0; 0; 0), D(1; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{BD} \{1 - 0; 1 - 0; 0 - 0\}$$

$$C(0; 1; 0), D_1(1; 1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{CD_1} \{1 - 0; 1 - 1; 2 - 0\}$$

$$\cos \angle(BD; CD_1) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,3162$$

$$\angle(BD; CD_1) \approx 71^\circ 34'$$



sin	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'
15°	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74°	3	6	8
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73°	3	6	8
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72°	3	6	8
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71°	3	6	8
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0,3420	70°	3	5	8
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	cos	1'	2'	3'

Задача. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед, где $AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$.

Найти $\angle(BD; CD_1)$ и $\angle(AC; AC_1)$.

Решение.

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

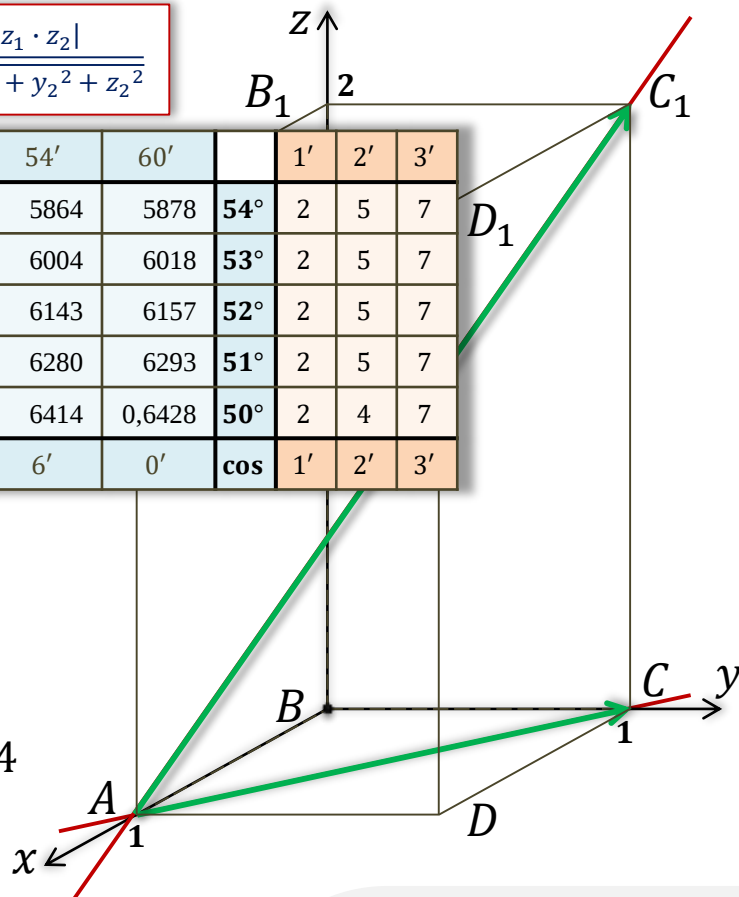
sin	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'
35°	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54°	2	5	7
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53°	2	5	7
37°	6018	6032	6040	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52°	2	5	7
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51°	2	5	7
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	0,6428	50°	2	4	7
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	cos	1'	2'	3'

$$A(1; 0; 0), C(0; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AC} \{0 - 1; 1 - 0; 0 - 0\}$$

$$A(1; 0; 0), C_1(0; 1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AC_1} \{0 - 1; 1 - 0; 2 - 0\}$$

$$\cos \angle(AC; AC_1) = \frac{|-1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774$$

$$\angle(AC; AC_1) \approx 54^\circ 44'$$



Задача. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед, где $AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$.

Найти $\angle(BD; CD_1)$ и $\angle(AC; AC_1)$.

Решение.

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$B(0; 0; 0), D(1; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{BD} \{1; 1; 0\}$$

$$C(0; 1; 0), D_1(1; 1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{CD_1} \{1; 0; 2\}$$

$$\cos \angle(BD; CD_1) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,3162$$

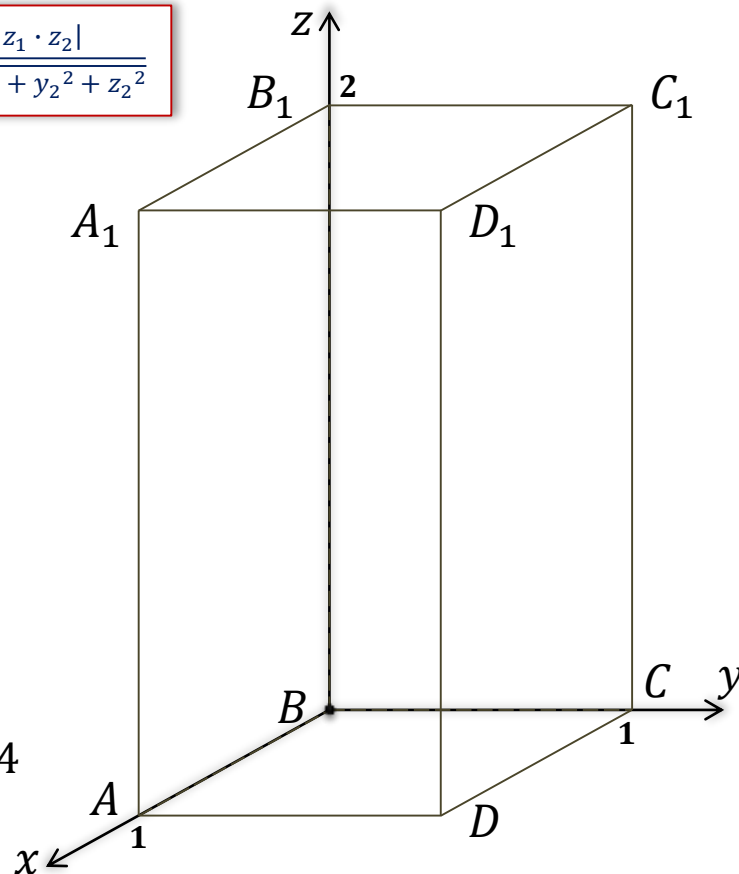
$$\angle(BD; CD_1) \approx 71^\circ 34'$$

$$A(1; 0; 0), C(0; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AC} \{-1; 1; 0\}$$

$$A(1; 0; 0), C_1(0; 1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AC_1} \{-1; 1; 2\}$$

$$\cos \angle(AC; AC_1) = \frac{|-1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774$$

$$\angle(AC; AC_1) \approx 54^\circ 44'$$



Задача. $ABCD$ — тетраэдр.

$\angle ABD = \angle ABC = \angle DBC = 90^\circ$. $AB = BD = 2$, а $BC = 1$.

Вычислить синус угла между прямой,
проходящей через середины рёбер AD и BC

а) ABD ; б) DBC ; в) ABC .

Решение.

$\overrightarrow{XY}$ — направляющий вектор прямой XY

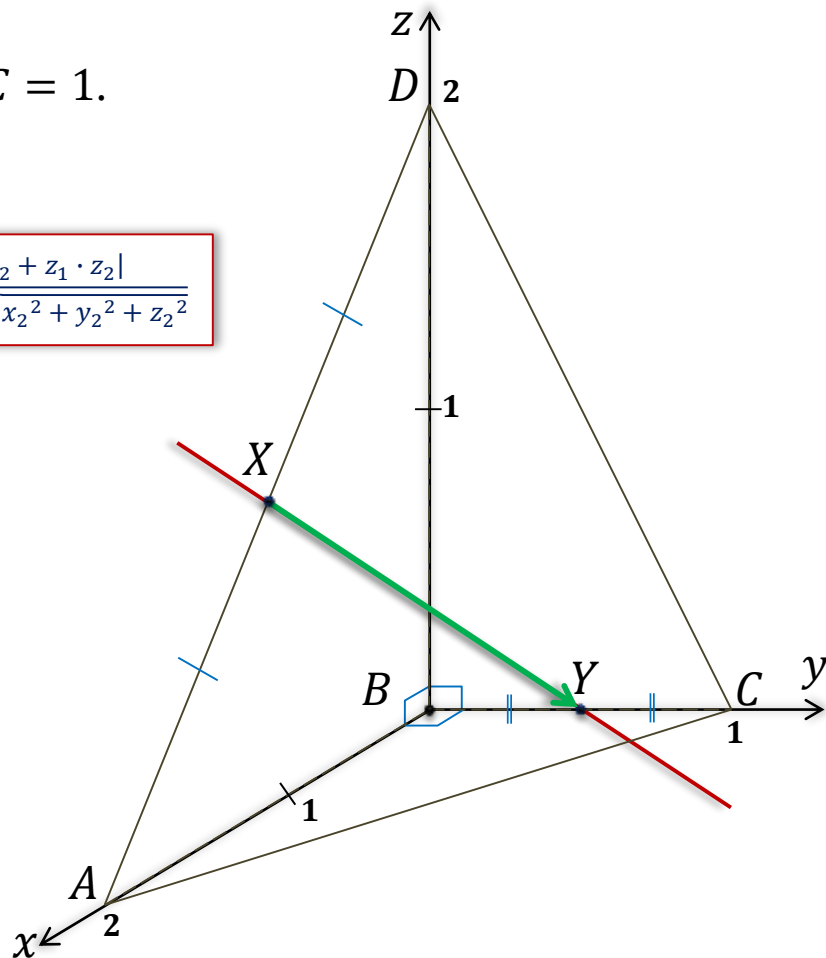
$$A(2; 0; 0), D(0; 0; 2) \Rightarrow X(1; 0; 1)$$

$$B(0; 0; 0), C(0; 1; 0) \Rightarrow Y(0; 0,5; 0)$$

$$\overrightarrow{XY} \{0 - 1; 0,5 - 0; 0 - 1\}$$

$$\overrightarrow{XY} \{-1; 0,5; -1\}$$

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



Задача. $ABCD$ — тетраэдр.

$\angle ABD = \angle ABC = \angle DBC = 90^\circ$. $AB = BD = 2$, а $BC = 1$.

Вычислить синус угла между прямой,

проходящей через середины рёбер AD и BC , и плоскостью:

а) ABD ; б) DBC ; в) ABC .

Решение.

$$\overrightarrow{XY} \{-1; 0,5; -1\}$$

а) $\vec{j} \{0; 1; 0\} \perp ABD$

$$\sin \angle(XY; ABD)$$

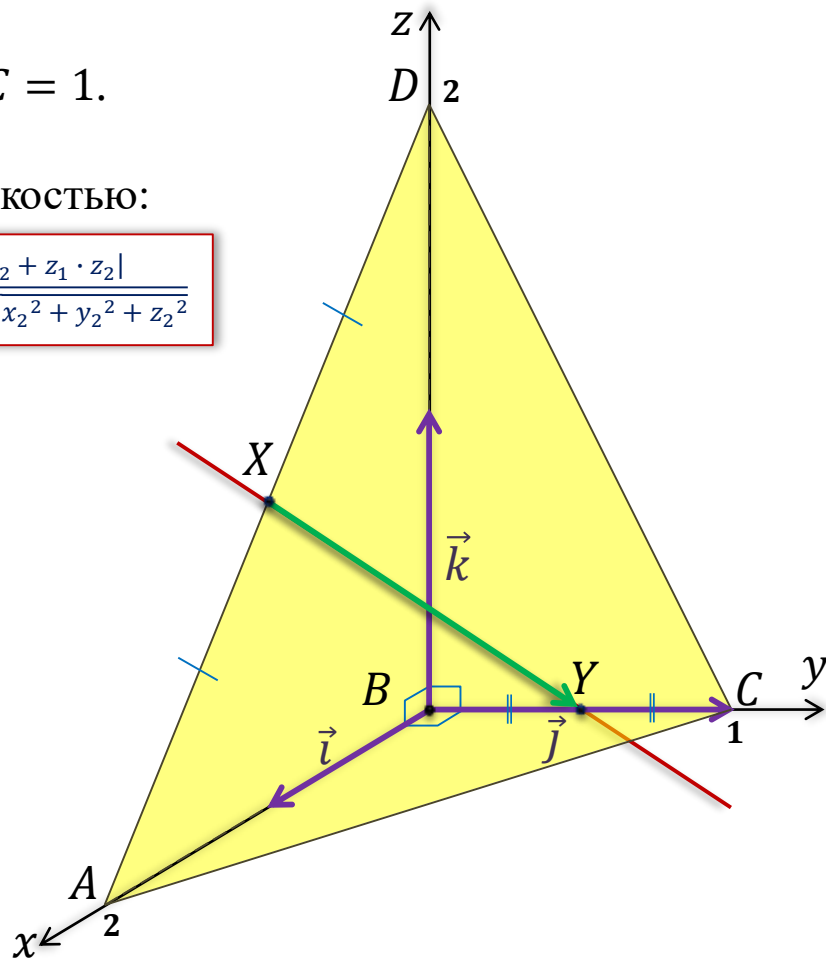
б) $\vec{i} \{1; 0; 0\} \perp DBC$

$$\sin \angle(XY; DBC)$$

в) $\vec{k} \{0; 0; 1\} \perp ABC$

$$\sin \angle(XY; ABC)$$

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



Задача. Доказать, что угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых содержит диагональ куба, а другая — диагональ грани куба, равен 90° .

Решение.

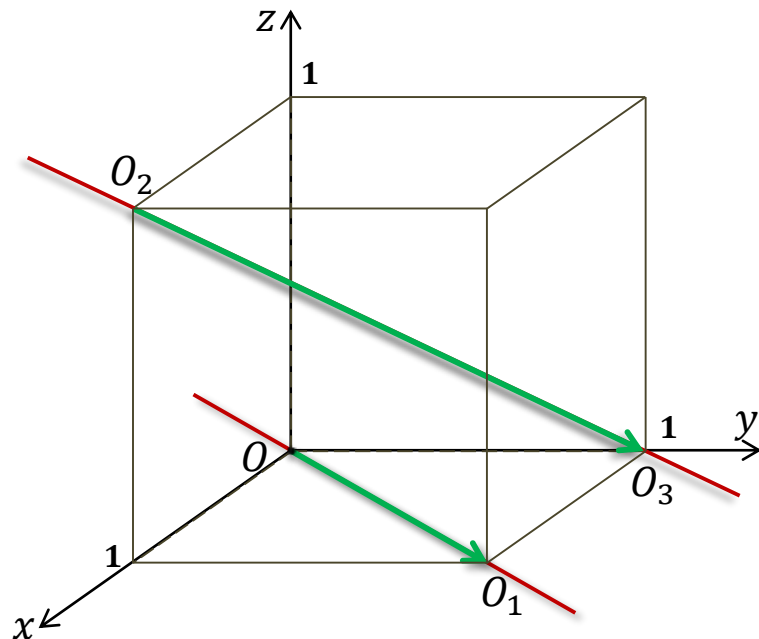
$$O(0; 0; 0), O_1(1; 1; 0)$$

$$O_2(1; 0; 1), O_3(0; 1; 0)$$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

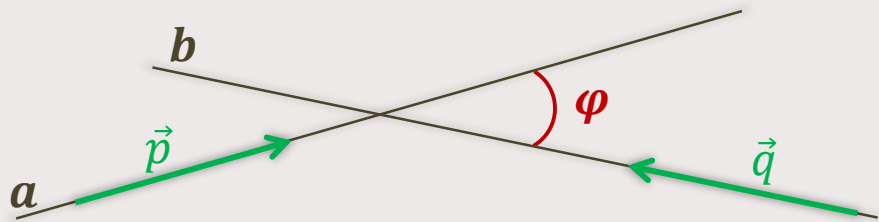
$$\cos \angle(OO_1; O_2O_3) = \frac{|1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}}$$

$$\Rightarrow \angle(OO_1; O_2O_3) = 90^\circ$$



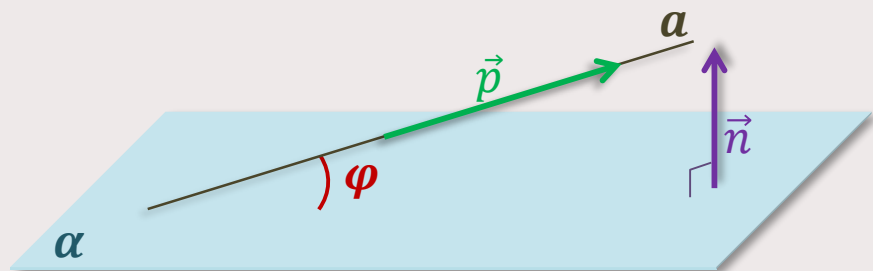
Что и требовалось доказать.

Вычисление углов между прямыми и плоскостями



$$\vec{p} \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{q} \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



$$\vec{p} \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{n} \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$