



Два основных метода решения
тригонометрических уравнений.

- Введение новой переменной
- Разложение на множители

Метод введения новой переменной

Пример 1.

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

Решение

Введем новую переменную : $t = \sin x$.

Тогда уравнение примет вид $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда находим:

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 + 3}{4} = 2$$

Так как $\sin x = t$, то либо $\sin x = 2$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$.

1) $\sin x = 2 \Rightarrow$ корней нет

2) $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

Метод введения новой переменной

Пример 2. $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$

Решение.

Воспользуемся тем, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Тогда заданное уравнение можно записать в виде

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0,$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x = 0,$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Введем новую переменную : $t = \cos x$.

Тогда уравнение примет вид $2t^2 - t - 1 = 0$,

Продолжить решение самостоятельно

Метод введения новой переменной

Пример 3.

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 4$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 3$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3$$

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = 2 \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$t + \frac{3}{t} = 4$$

Метод разложения на множители

$$f(x) = 0$$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$$

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0 \end{cases}$$

Метод разложения на множители

Пример 1. $(\sin x - \frac{1}{3})(\cos x + \frac{2}{5}) = 0$

Решение.

Задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{3} = 0; \\ \cos x + \frac{2}{5} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = \frac{1}{3}; \\ \cos x = -\frac{2}{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n; \\ x = \pm \arccos(-\frac{2}{5}) + 2\pi n. \end{cases}$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n; \quad x = \pm \arccos(-\frac{2}{5}) + 2\pi n,$$

Пример 2.

Метод разложения на множители

$$2\sin x \cos 5x - \cos 5x = 0$$

Решение.

$$2\sin x \cos 5x - \cos 5x = 0,$$
$$\cos 5x(2\sin x - 1) = 0.$$

Задача сводится к решению совокупности уравнений:

Продолжить решение самостоятельно

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}; \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$

Метод разложения на множители

Замечание.

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\operatorname{tg} x(\sin x - 1) = 0}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \sin x = 1; \end{cases} \quad \underline{\begin{cases} x = \pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}}$$

Домашнее задание:

1) Конспект;

2) Решить уравнения:

О18.6. а) $3 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0;$

О18.7. а) $6 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0;$

О18.9. а) $3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0;$