Два основных метода решения тригонометрических уравнений.

- Введение новой переменной
- Разложение на множители

Метод введения новой переменной

Пример 1.

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Решение

Введем новую переменную : $t = \sin x$.

Тогда уравнение примет вид $2t^2 - 5t + 2 = 0,$ откуда находим:

$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5+3}{4} = 2$$

Так как $\sin x = t,$ то либо $\sin x = 2,$ либо $\sin x = \frac{1}{2}.$

1) $\sin x = 2$ $\Rightarrow$ корней нет

2) $\sin x = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

Метод введения новой переменной

Пример 2. $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$

Решение.

Воспользуемся тем, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
Тогда заданное уравнение можно записать в виде

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0,$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x = 0,$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Введем новую переменную : $t = \cos x$.

Тогда уравнение примет вид $2t^2 - t - 1 = 0,$

Продолжить решение самостоятельно

Метод введения новой переменной

Пример 3.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=4$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$t+\frac{3}{t}=4$$

$$t^2-4t+3=0$$

$$t_1=1,\quad t_2=3$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1,\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=3$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x=2\operatorname{arctg}3+2\pi n, n\in Z.$$

Метод разложения на множители

$$f(x) = 0$$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0 \end{array}\right.$$

Метод разложения на множители

Пример 1. $(\sin x - \frac{1}{3})(\cos x + \frac{2}{5}) = 0$

Решение.

Задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x - \frac{1}{3} = 0; \\ \cos x + \frac{2}{5} = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{3}; \\ \cos x = -\frac{2}{5}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n; \\ x = \pm \arccos(-\frac{2}{5}) + 2\pi n. \end{array}\right.$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n; \quad x = \pm \arccos(-\frac{2}{5}) + 2\pi n,$$

Пример 2.

Метод разложения на множители

$$2\sin x\cos 5x-\cos 5x=0$$

Решение.

$$2\sin x\cos 5x-\cos 5x=0,$$
$$\cos 5x(2\sin x-1)=0.$$

Задача сводится к решению совокупности уравнений:

Продолжить решение самостоятельно

Ответ: $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5};\quad x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$

Метод разложения на множители

Замечание.

$$f_1(x)\cdot f_2(x)=0 \;\rightarrow\; \left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0 \end{array}\right.$$

$$\underline{\operatorname{tg}}\, x(\sin x-1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x=0, \\ \sin x=1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=\pi n, \\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n. \end{array}\right.$$

Домашнее задание:
1)Конспект;
2)Решить уравнения:

- 18.6. а) $3 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$;
- 18.7. а) $6 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;
- 18.9. а) $3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0$;