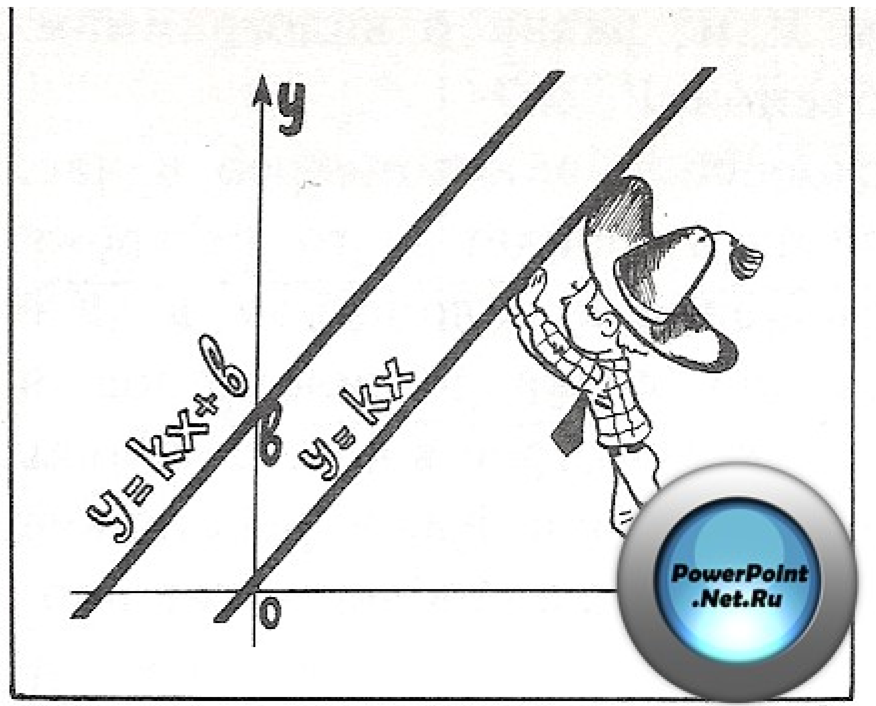
Способы задания функции и ее свойства



ЦЕЛЬ: углубить знания о функциях, способах их задания, простейших свойствах; изучить понятие обратной функции и научиться их находить

План лекции:

1. Функция
2. Способы задания функции
3. Область определения функции
4. Множество значений функции
5. Обратная функция

ФУНКЦИЯ

Зависимость переменной *y* от переменной *x*, при которой каждом значению переменной *x* соответствует единственное значение *y*, называют функцией.

Обозначение функции

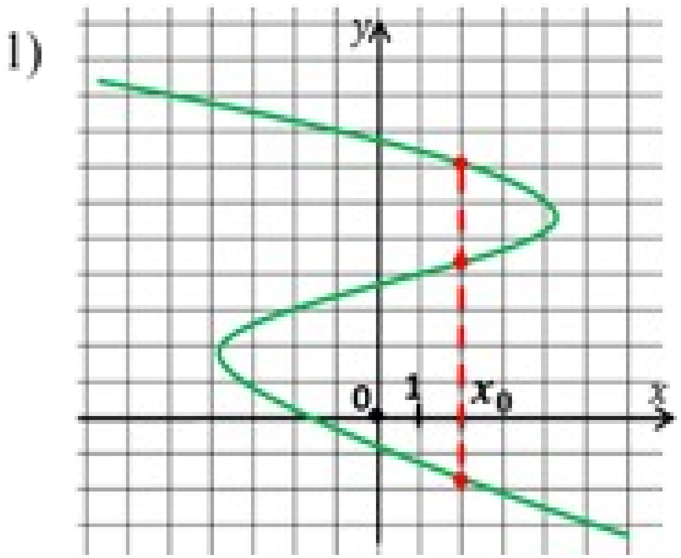
$y = f(x)$ $y = \varphi(x)$ $y = g(x)$

x - независимая переменная, или аргумент

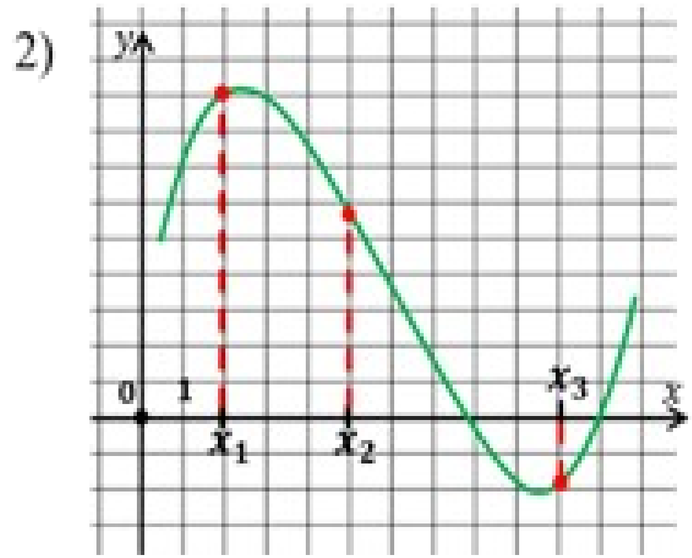
y – зависимая переменная, или функция

f, φ, g - правило, или закономерность

В определении сказано, что только та зависимость является функцией, у которой каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции.

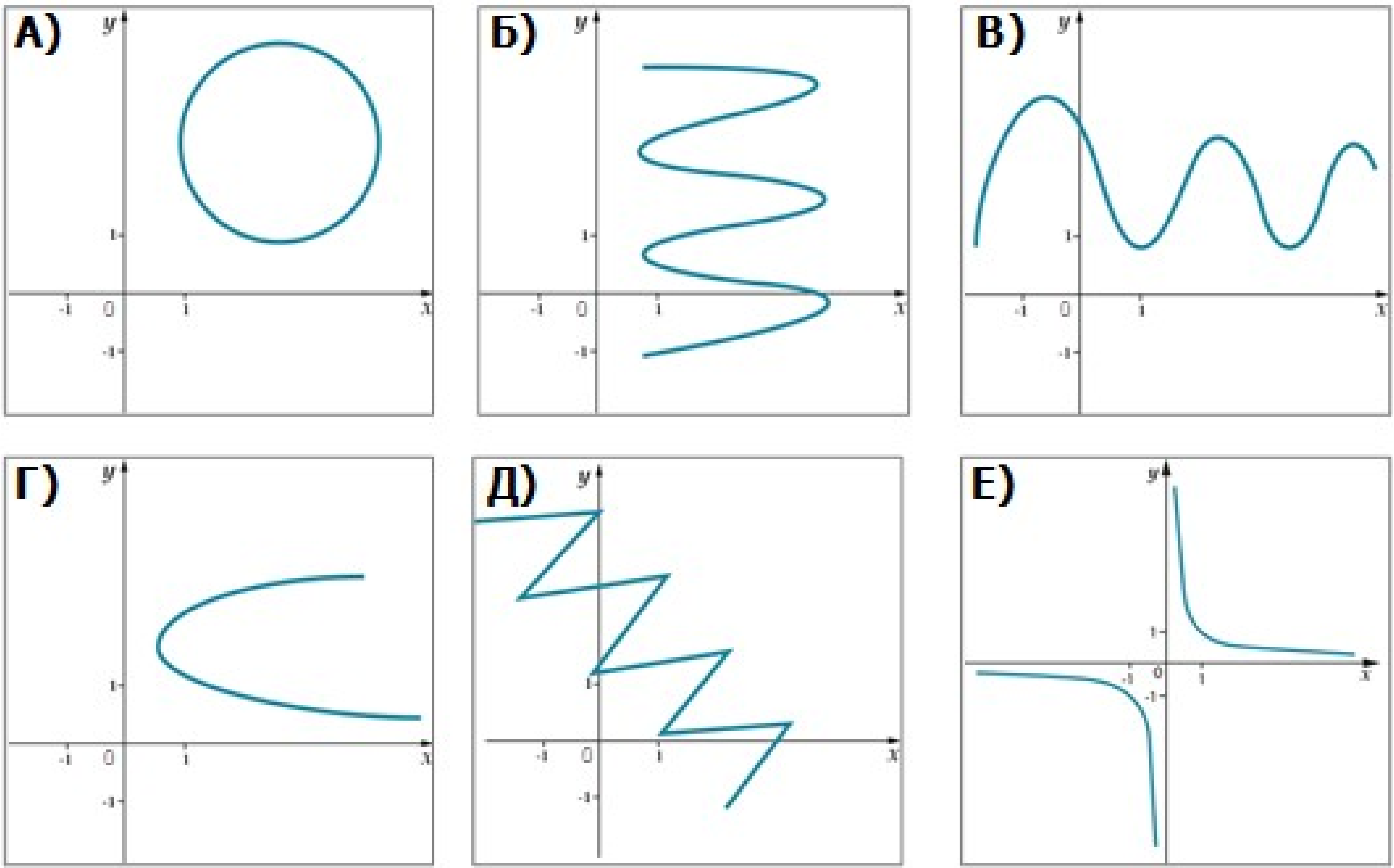


НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ



ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ

Среди данных графиков, найдите график функции:



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

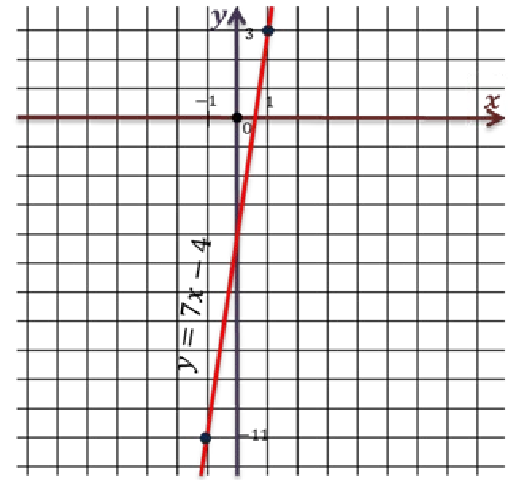
Что значит задать функцию?

Указать правило, которое позволяет произвольно выбранному значению x из области определения функции найти соответствующее значение y

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

СЛОВЕСНЫЙ

ГРАФИЧЕСКИЙ



«Функция равна 1, если x – рациональное число; функция равна 0, если x – иррациональное число».

АНАЛИТИЧЕСКИЙ

$$V=abc$$

$$y(x) = x + 1$$

ТАБЛИЧНЫЙ

x	1	2	3	4	5	6
y	230	270	310	300	360	340

НАХОЖДЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Функция может принимать различные значения в зависимости от значения аргумента

Пример. Найдём значение каждой функции при заданном значении аргумента.

1) $f(x) = 2x^3 - 1$ при $x = 0$,

$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 1 = 0 - 1 = -1.$

$f(0) = -1$

2) $q(x) = \frac{7}{2x+1}$ при $x = 3$,

$q(3) = \frac{7}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{7}{7} = 1.$

$q(3) = 1$

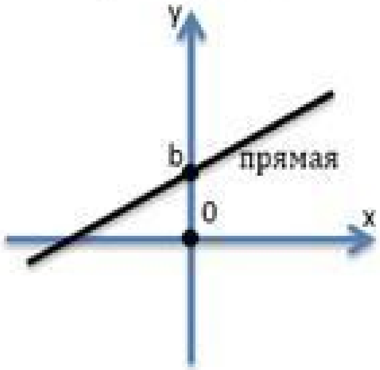
3) $\varphi(x) = \frac{1}{2}x - 5$ при $x = 4$,

$\varphi(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 - 5 = 2 - 5 = -3.$

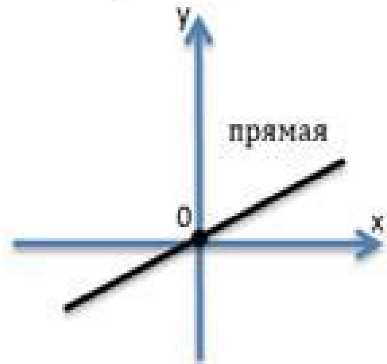
$\varphi(4) = -3$

Ранее вами были изучены несколько важных функций. Вспомним их.

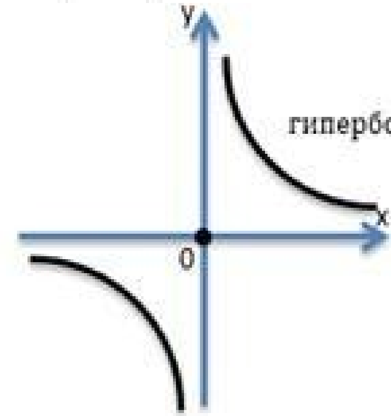
Линейная функция
$y = kx + b$



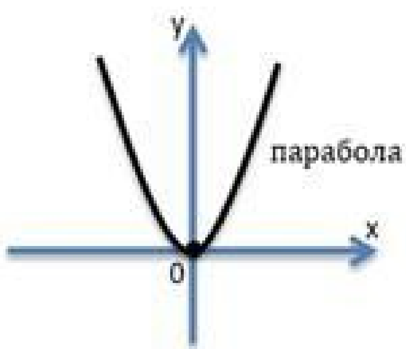
Прямая пропорциональность
$y = kx$



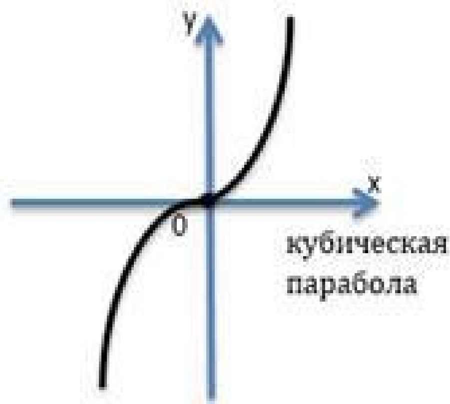
Обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$



Функция $y = x^2$



Функция $y = x^3$



Функция $y = \sqrt{x}$

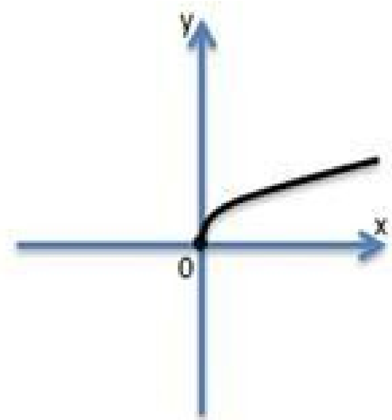


ГРАФИК ФУНКЦИИ И ЕГО ПОСТРОЕНИЕ

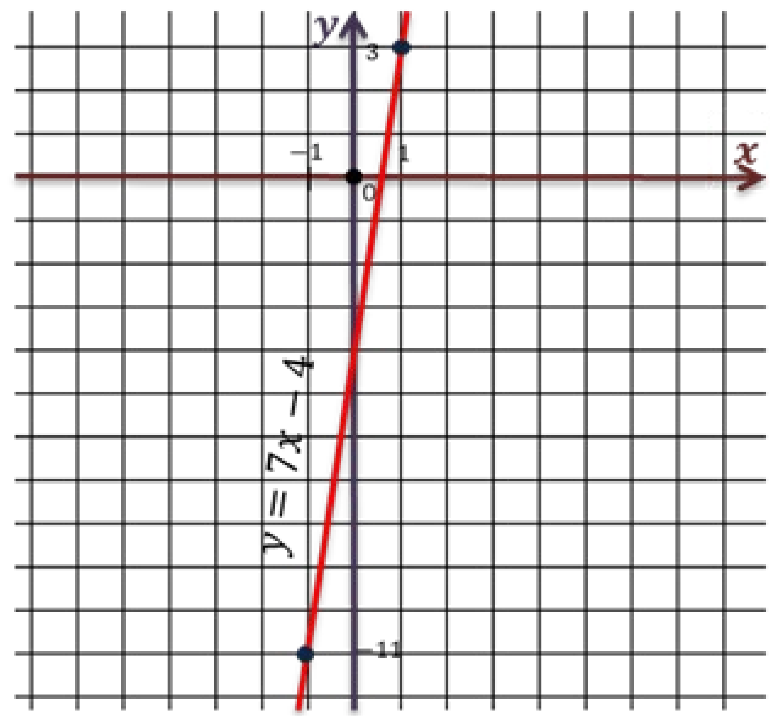
Графиком функции f называют множество всех точек (x;y) координатной плоскости, где y = f(x), а x «пробегает» всю область определения функции f.

$$f(x) = 7x - 4$$

Это линейная функция, графиком как вы помните, является прямая.
Для изображения прямой достаточно двух точек.

$x = 1:$
$f(1) = 7 \cdot 1 - 4 = 3$ $\quad (1; 3)$

$x = -1:$
$f(-1) = 7 \cdot (-1) - 4 = -11$ $\quad (-1; -11)$



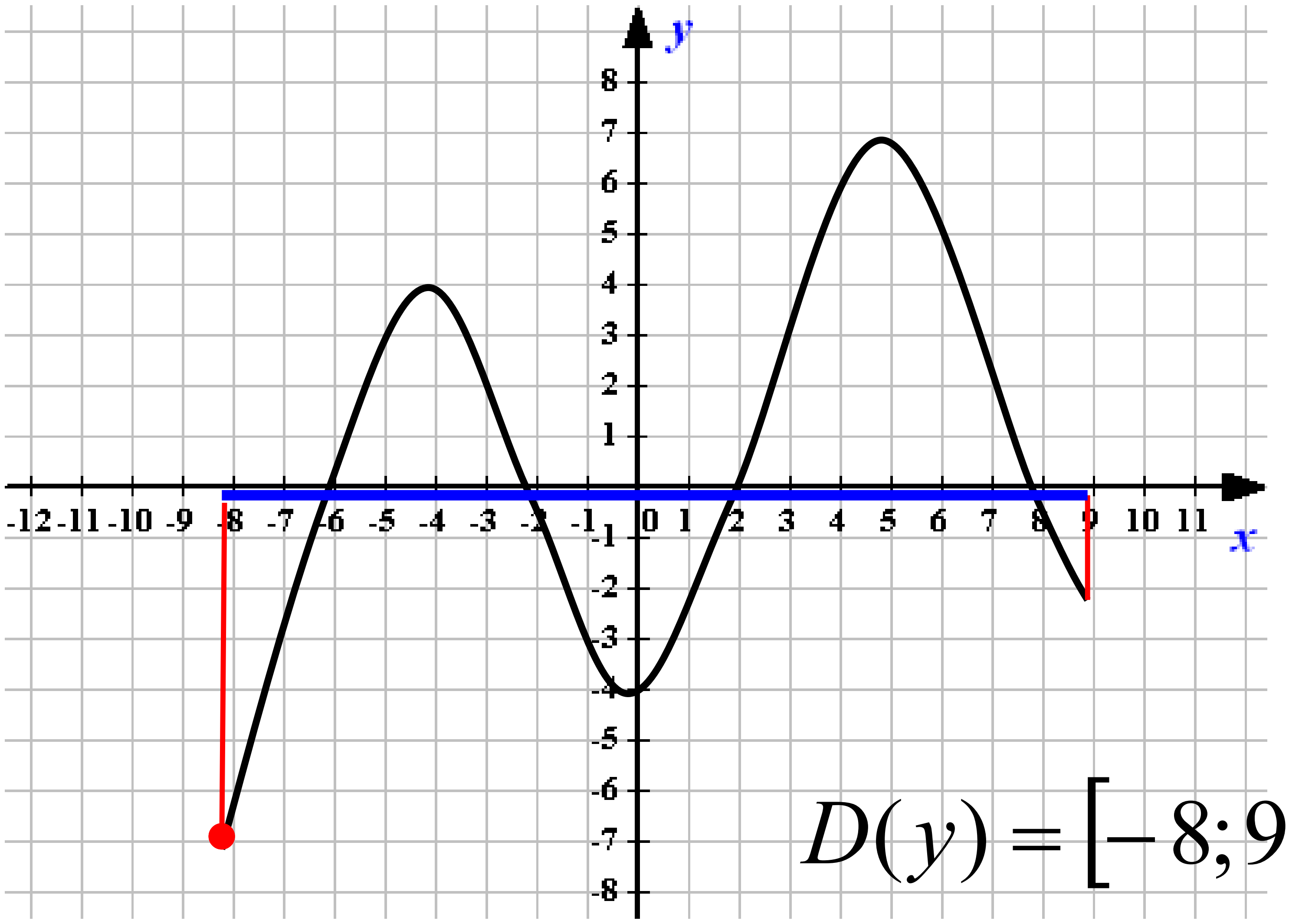
Получаем точки с координатами (1;3) и (-1;-11).
Проведём прямую через полученные точки.

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

Область определения функции D(y) - это множество всех допустимых значений аргумента x (независимой переменной x), при которых выражение, стоящее в правой части уравнения функции y = f(x) имеет смысл.

Другими словами, это область допустимых значений выражения f(x).

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

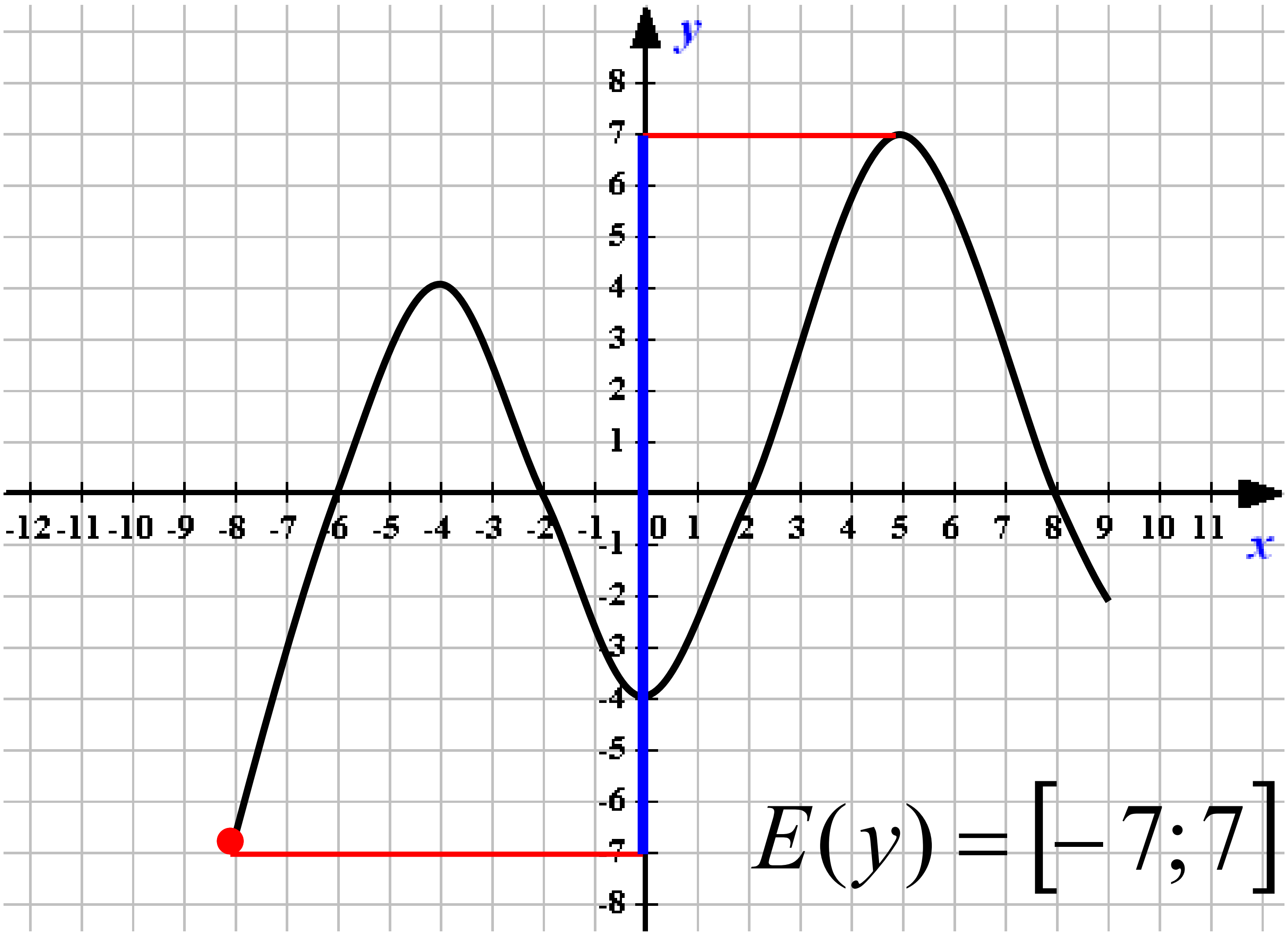


$$D(y) = [-8;9]$$

МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

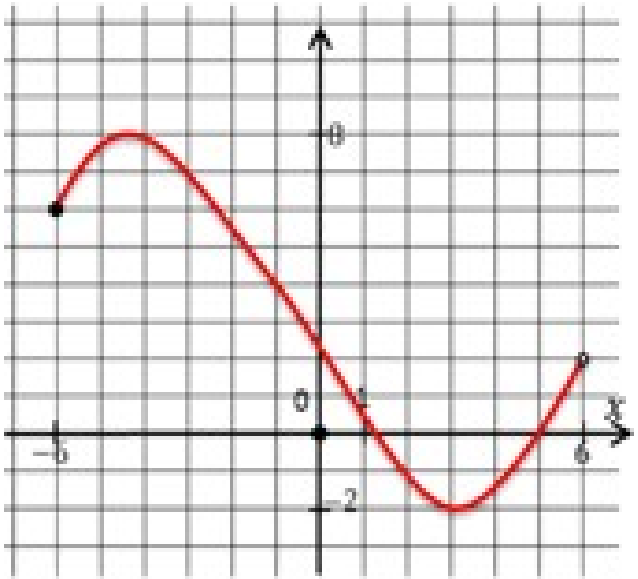
Множество, состоящее из всех чисел f(x), таких, что x принадлежит области определения функции f, называют множеством значений функции f и обозначают E(y).

МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

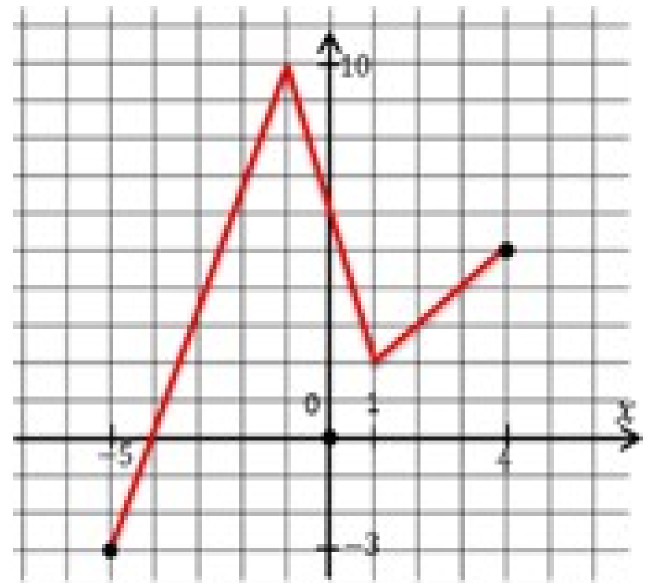


$$E(y) = [-7; 7]$$

Потренируемся находить область определения и область значений функции по её графику



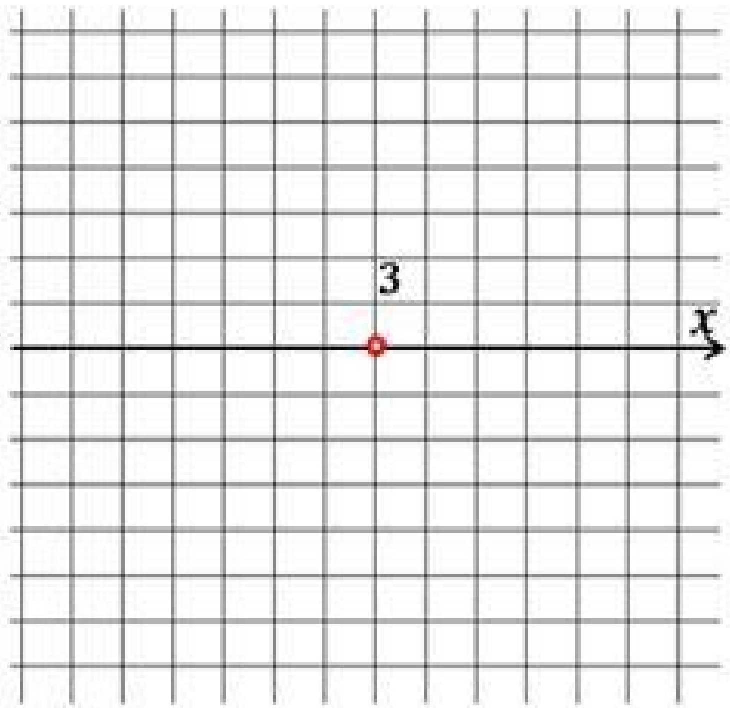
$D(y) = [-6; 6)$,
$E(y) = [-2; 8]$.



$D(y) = [-5; 4]$,
$E(y) = [-3; 10]$.

Область определения можно находить не только по графику функции, но и по формуле, с помощью которой задана функция.

$$f(x) = \frac{x+5}{3-x}.$$



$f(x) = \frac{x+5}{3-x}$,

$D(f)$: $\quad 3 - x \neq 0$

$\quad x \neq 3$

$x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$,

$D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$,

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Пример. Найдем область определения каждой из функции

а) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}}$

Аргумент x может принимать любые значения,
кроме $x^2 - 4x + 3 = 0$, т. к. на нуль делить нельзя.
Поэтому D(y): $x^2 - 4x + 3 \neq 0$.

Найдем при каких значениях x уравнение будет равно 0.
Уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$ имеет корни $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

Тогда область определения функции
D(f): $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$ или $x \in \mathbb{R} \backslash \{1; 3\}$
(читается: область определения функции –
все действительные числа, кроме 1 и 3).

Пример. Найдем область определения каждой из функции

б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

По определению квадратного корня выражение $x^2 - 9$ не может быть отрицательным числом.

Решением неравенства есть $x^2 - 9 < 0$ является промежуток (-3; 3).

Поэтому D(y): $x \in \mathbb{R} \setminus (-3; 3)$.

Пример. Найдем область определения каждой из функции

в) $\mathbf{y = \frac{1}{\sin x}}$

Так как на нуль делить нельзя, то D(y) – все действительные числа, кроме sin x = 0.

Корень уравнения sin x = 0 $x = \pi n, n \in Z$.

Значит D(y): $x \in \mathbb{R} \setminus x = \pi n, n \in Z$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ: определи область определения для каждой функции

$$y=\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$$

$$y=x^2-3x+4$$

$$y=\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

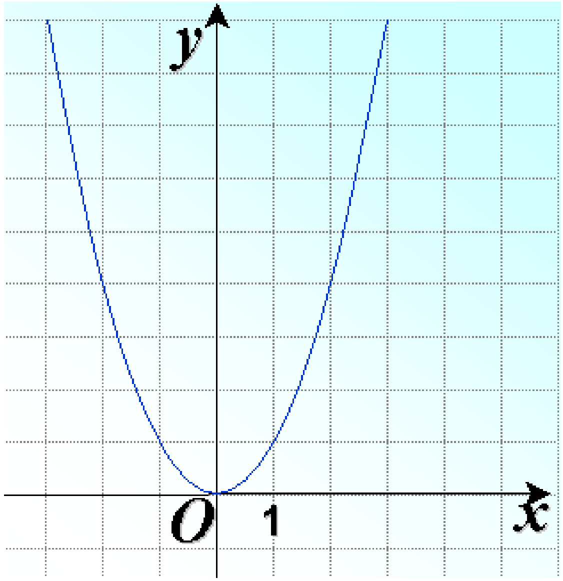
$$D(y)=(-\infty;+\infty)$$

$$D(y)=\left(-\infty;\ 0\right]\cup\left(2;\ +\infty\right)$$

$$D(y):\ x\neq-2;\ \ x\neq3$$

ЗАПОМНИ!!!

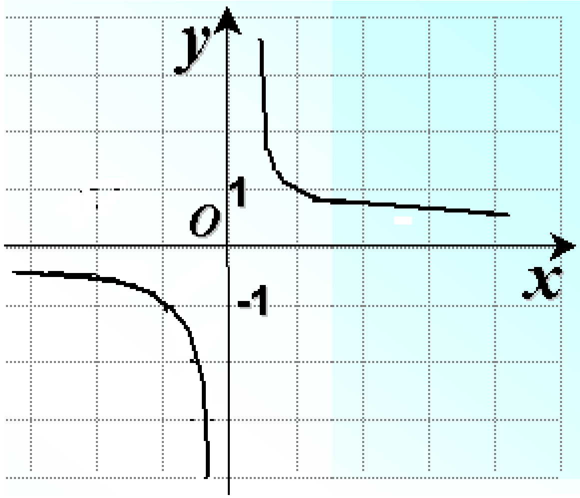
1. $y = x^2$



$D(f) = (-\infty;\ +\infty)$

$E(f) = [0;\ \infty)$

2. $y = \dfrac{1}{x}$

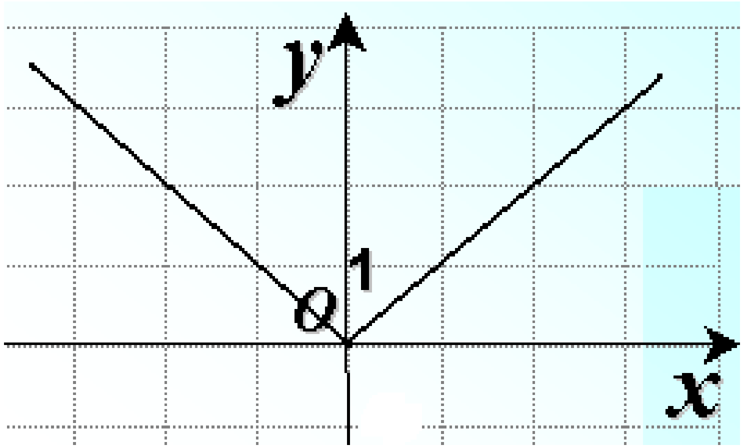


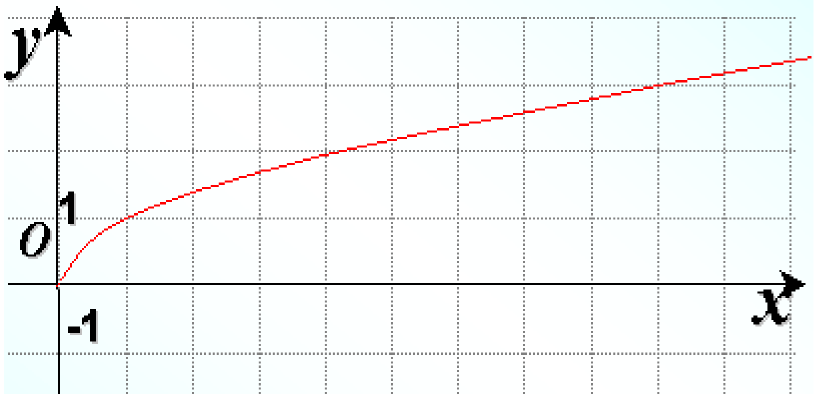
$D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$

$E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$

3. $y = |x|$

4. $y = \sqrt{x}$





$D(f) = (-\infty;\ +\infty)$

$E(f) = [0;\ \infty)$

$D(f) = [0;\ +\infty)$

$E(f) = [0;\ +\infty)$

ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Обратная функция — функция $y = g(x)$, которая получается из данной функции $y = f(x)$, если из отношения $x = f(y)$ выразить y через x.

Чтобы для данной функции $y = f(x)$ найти обратную, надо:

1.В соотношении $y = f(x)$ заменить x на y, а y — на x: $x = f(y)$.

2. В полученном выражении $x=f(y)$ выразить y через x.

Пример. Найдем обратную функцию к функции $y = 3x - 8$.

Будем действовать по представленному выше алгоритму:

1. $x = 3y - 8$
2. $3y = x + 8$

$y = \frac{x+8}{3}$ – обратная функция к заданной.

Область определения и область значений функций f и g меняются местами: область определения f является областью значений g, а область значений f — областью определения g.

Практическая часть:

1. Найдите значения функции:

а) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ в точке -1, $\frac{1}{2}$, 10;

б) $f(x) = 2 - \sin 2x$ в точках $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{5\pi}{12}$.

2. Найдите область определения каждой из функции:

а) $f(x) = \frac{5-x^2}{x^2+2x-8}$;

б) $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$;

в) $f(x) = 2\mathrm{tg}x$;

3. Постройте графики функций:

а) $y = \frac{1}{x} + 2$; б) $y = 4 - x^2$; в) $y = \cos x - 3$.

4. Найти обратную функцию для функции $y = 11 - 5x$.