# «Комплексные числа и действия над ними»

# п.1 Историческая справка

Понятие комплексного числа возникло из практики и теории решения алгебраических уравнений.

С комплексными числами впервые математики встретились при решении квадратных уравнений. Вплоть до XVI века математики всего мира, не находя приемлемого толкования для комплексных корней, возникавших при решении квадратных уравнений, объявляли их ложными и не принимали во внимание.

Кардано, занимавшийся решением уравнений 3-й и 4-й степеней был одним из первых математиков, формально оперировавших комплексными числами, хотя их смысл во многом оставался для него неясным.

Смысл комплексных чисел разъяснил другой итальянский математик Р.Бомбелли. В своей книге «Алгебра» (1572 г.) он впервые изложил правила действий над комплексными числами в современной форме.

Вместе с тем, вплоть до XVIII века, комплексные числа считали «воображаемыми» и бесполезными. Интересно отметить, что даже такой выдающийся математик как Декарт, отождествлявший действительные числа с отрезками числовой прямой, считал, что для комплексных чисел не может быть никакого реального истолкования, и они навечно останутся воображаемыми, мнимыми. Аналогичных взглядов придерживались великие математики Ньютон и Лейбниц.

содержание

Лишь в XVIII веке многие задачи математического анализа, геометрии, механики требовали широкого применения операций над комплексными числами, что создало условия для разработки их геометрического истолкования.

В прикладных работах Даламбера и Эйлера в середине XVIII века авторы представляют произвольные мнимые величины в виде $z=a+ib$, что позволяет изображать такие величины точками координатной плоскости. Именно эта интерпретация была использована Гауссом в работе, посвященной исследованию решений алгебраического уравнения.

И только в начале XIX века, когда уже была выяснена роль комплексных чисел в различных областях математики, была разработана очень простая и естественная их геометрическая интерпретация, позволившая уяснить геометрический смысл операций над комплексными числами.

Этому математика обязана Гауссу, опубликовавшему в 1831 г. свою работу по теории чисел. Тем самым был положен конец сомнениям в законном и полезном применении комплексного числа.

содержание

# п.2 Основные понятия

***Комплексным числом*** $z$ называется выражение вида $z=a+ib$, где $a$ и $b$ – действительные числа, $i$ – *мнимая единица*, которая определяется соотношением:

$$i^2=-1; \qquad i=\sqrt{-1}.$$

При этом число $a$ называется ***действительной частью*** числа $z$ ($a = Re\, z$), а $b$ - ***мнимой частью*** ($b = Im\, z$).

Если $a=Re\, z=0$, то число z будет *чисто мнимым*, если $b=Im\, z=0$, то число $z$ будет *действительным*.

Числа $z=a+ib$ и $\bar{z}=a-ib$ называются ***комплексно – сопряженными***.

Два комплексных числа $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2$ называются *равными*, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1=a_2; \qquad b_1=b_2$$

Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части

$$a=b=0.$$

Также комплексные числа можно записывать, например, в виде $z=x+iy$, $z=u+iv$.

содержание

# п.3 Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z=x+iy$ можно изобразить точкой $M(x;y)$ плоскости $xOy$ такой, что $x = Re\ z,\ y = Im\ z$. И, наоборот, каждую точку $M(x;y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z=x+iy$ (рисунок 1).

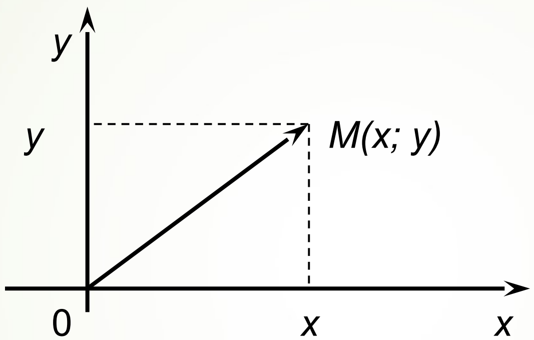


Рисунок 1

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной плоскостью*.**

Ось абсцисс называется ***действительной осью*,** так как на ней лежат действительные числа $z=x+0i=x$ .

Ось ординат называется ***мнимой осью*,** на ней лежат мнимые комплексные числа $z=0+yi=yi$.

содержание

Часто вместо точек на плоскости берут их *радиус-векторы* $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$,

т.е. векторы, началом которых служит точка $O(0;0)$, концом $M(x;y)$ .

Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число $z$, называется ***модулем*** этого числа и обозначается $|z|$ или $r$.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется ***аргументом*** этого комплексного числа, обозначается $Arg\ z$ или $\varphi$.

Аргумент комплексного числа $z=0$ не определен.

Аргумент комплексного числа $z\neq0$ - величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k=0,-1,1,-2,2,..)$ :

$$Arg\ z = arg\ z + 2\pi k,$$

*где* $arg\ z$ - ***главное значение аргумента****, заключенное в промежутке* $(-\pi, \pi]$.

содержание

# п.4 Формы записи комплексных чисел

Запись числа в виде $z=x+iy$ называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Из рисунка 1 видно, что $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, следовательно, комплексное $z=x+iy$ число можно записать в виде:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма записи называется ***тригонометрической формой записи*** комплексного числа.

Модуль $r=|z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргумент $\varphi$ определяется из формул

$$\cos\varphi = \frac{x}{r};\quad \sin\varphi = \frac{y}{r};\quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

содержание

При переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа, т.е. считать $\varphi = arg\, z$.

Так как $-\pi < \arg z \le \pi,$ то из формулы $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ получаем, что

$\arg z = arctg\dfrac{y}{x}$ - для внутренних точек $I, IV$ четвертей;

$\arg z = arctg\dfrac{y}{x} + \pi$ - для внутренних точек $II$ четверти;

$\arg z = arctg\dfrac{y}{x} - \pi$ - для внутренних точек $III$ четверти.

***Пример 1.*** Представить комплексные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрической форме.

содержание

*Решение*. Комплексное число $z=x+iy$ в тригонометрической форме имеет вид $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=arctg\,\dfrac{y}{x}$.

1) $z_1=1+i$ (число $z_1$ принадлежит $I$ четверти), $x=1,\ y=1.$

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\quad \varphi=arctg\frac{1}{1}=arctg\,1=\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right).$

2) $z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (число $z_2$ принадлежит $II$ четверти) $x=-\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

$$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1,\qquad \varphi=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

Так как $z_2\in II$ ч., то $Arg\,z_2=\pi+\varphi=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}.$

Следовательно, $z_2=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right).$

*Ответ:* $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right),\quad z_2=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right).$

содержание

Рассмотрим показательную функцию $w=e^z$, где $z=x+iy$ - комплексное число.

Можно показать, что функция *w* может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Данное равенство называется ***уравнением Эйлера.***

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2};$

2) $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}};$

3) $(e^z)^m = e^{mz};$ где $m$ – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем: $$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

содержание

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме

$$z=r(\cos\varphi +i\sin\varphi)$$

и воспользоваться формулой Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,$ то комплексное число можно записать в виде

$$z=r\,e^{i\varphi}$$

Полученное равенство называется ***показательной формой*** комплексного числа.

содержание

# п.5 Действия над комплексными числами

## 1) Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

### а) Сложение комплексных чисел

**Суммой** двух комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

*Свойства операции сложения:*

1. $z_1+z_2=z_2+z_1,$
2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),$
3. $z+0=z.$

### б) Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

***Разностью*** двух комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется такое комплексное число $z$, которое, будучи сложенным с $z_2$, дает число $z_1$ и определяется равенством

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

содержание

### в) Умножение комплексных чисел

**Произведением** комплексных чисел $z_1=x_1+y_1 i$ и $z_2=x_2+y_2 i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z=z_1 z_2=(x_1 x_2-y_1 y_2)+i(x_1 y_2-x_2 y_1).$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$i^2=-1.$$

*Свойства операции умножения:*

1. $z_1 z_2=z_2 z_1,$
2. $(z_1 z_2)z_3=z_1(z_2 z_3),$
3. $z_1(z_2+z_3)=z_1 z_2+z_1 z_3,$
4. $z\cdot 1=z.$

### г) Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению.

**Частным двух комплексных чисел** $z_1$ и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число $z$, которое будучи умноженным на $z_2$, дает число $z_1$, т.е. $\frac{z_1}{z_2} = z,$ если $z_2 z = z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i \neq 0$, $z = x + yi$, то из равенства $(x+yi)(x_2+iy_2) = x_1 + y_1 i$, следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения $x$ и $y$:

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

содержание

На практике вместо полученной формулы используют следующий прием: умножают числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

***Пример 2.*** Даны комплексные числа $10+8i$, $1+i$. Найдем их сумму, разность, произведение и частное.

*Решение.*

а) $(10+8i)+(1+i)=(10+1)+(8+1)i=11+9i;$

б) $(10+8i)-(1+i)=(10-1)+(8-1)i=9+7i;$

в) $(10+8i)(1+i)=10+10i+8i+8i^2=2+18i;$

г) $\frac{10+8i}{1+i}=\frac{(10+8i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{10-10i+8i-8i^2}{1-i^2}=\frac{18-2i}{2}=9-i.$

содержание

**д) Возведение комплексного числа, заданного в алгебраической форме в $n$-ю степень**

Выпишем целые степени мнимой единицы:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i,$$
$$i^4 = i^3 \cdot i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1,$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i,$$
$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1$$ и т.д.

В общем виде полученный результат можно записать так:

$$i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i; \qquad i^{4n+2} = -1; \qquad i^{4n+3} = -i \ (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

**Пример 3.** Вычислить $i^{2092}$.

*Решение.*

1)Представим показатель степени в виде $n=4k+l$ и воспользуемся свойством степени с рациональным показателем $z^{4k+l}=(z^4)^k \cdot z^l$.

Имеем: $2092=4 \cdot 523$.

Таким образом, $i^{2092} = i^{4 \cdot 523} =(i^4)^{523}$, но так как $i^4=1$, то окончательно получим $i^{2092} =1$.

*Ответ:* $i^{2092} =1$.

содержание

При возведении комплексного числа $a+bi$ во вторую и третью степень пользуются формулой для квадрата и куба суммы двух чисел, а при возведении в степень $n$ ($n$ – натуральное число, $n \geq 4$) – формулой бинома Ньютона:

$$(a+bi)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}bi + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}(bi)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}(bi)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}a^{n-k}(bi)^k + \ldots + (bi)^n.$$

Для нахождения коэффициентов в этой формуле удобно пользоваться треугольником Паскаля.

содержание

## е) *Извлечение квадратного корня из комплексного числа*

***Квадратным корнем*** из комплексного числа называется такое комплексное число, квадрат которого равен данному.

Обозначим квадратный корень из комплексного числа $x+yi$ через $u+vi$, тогда по определению $\sqrt{x+yi}=u+vi.$

Формулы для нахождения $u$ и $v$ имеют вид

$$u=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$v=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (1)$$

Знаки $u$ и $v$ выбирают так, чтобы полученные $u$ и $v$ удовлетворяли равенству $2uv=y$ .

**Пример 4.** Извлечем квадратный корень из комплексного числа $z=5+12i$.

*Решение.*

Обозначим квадратный корень из числа $z$ через $u+vi$, тогда $(u+vi)^2=5+12i$.

Поскольку в данном случае $x=5$, $y=12$, то по формулам (1) получаем:

$$u^2=\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5^2+12^2}\right)=\frac{1}{2}(5+13)=9;$$

$$v^2=\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{5^2+12^2}\right)=4;$$

$$u^2=9;\quad u_1=3;\quad u_2=-3;\quad v^2=4;\quad v_1=2;\quad v_2=-2.$$

Таким образом, найдено два значения квадратного корня: $u_1+v_1i=3+2i$, $u_2+v_2i=-3-2i$, . (Знаки выбрали согласно равенству $2uv=y$, т.е. поскольку $y=12>0$, то $u$ и $v$ одного комплексного числа одинаковых знаков.)

*Ответ:* $\sqrt{5+12i}=\pm(3+2i)$.

## *2) Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме*

Рассмотрим два комплексных числа $z_1$ и $z_2$ , заданных в тригонометрической форме

$$z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z_2 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

### *а) Произведение комплексных чисел*

Выполняя умножение чисел $z_1$ и $z_2$ , получаем

$$z_1 \cdot z_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho(\cos\psi + i\sin\psi) =$$

$$= r\rho(\cos\varphi\cos\psi + i\cos\varphi\sin\psi + i\sin\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) =$$

$$= r\rho((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)),$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = r\rho(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))}$$

## *б) Частное двух комплексных чисел*

Пусть заданы комплексные числа $z_1$ и $z_2 \neq 0$.

Рассмотрим частное $\dfrac{z_1}{z_2}$, имеем

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\rho(\cos\psi+i\sin\psi)}=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\left(\cos\psi-i\sin\rho\right)}{\rho\left(\cos\psi+i\sin\psi\right)\left(\cos\psi-i\sin\psi\right)}=$$

$$=\frac{r}{\rho}\left(\frac{\left(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\right)+i\left(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\varphi\right)}{\cos^2\psi+\sin^2\psi}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r}{\rho}\left(\cos\left(\varphi-\psi\right)+i\sin\left(\varphi-\psi\right)\right)$$

**_Пример 5._** Даны два комплексных числа $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Найдите $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$.

*Решение.*

1) Используя формулу $z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2)[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$, получаем

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Следовательно, $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$.

2) Используя формулу $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$, получаем

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Следовательно, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

*Ответ:* $z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

***в) Возведение комплексного числа, заданного в тригонометрической форме в $n$-ю степень***

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

В общем случае получим:

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (2)$$

где $n$– целое положительное число.

Следовательно, *при возведении комплексного числа в степень модуль возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени*.

Выражение (2) называется ***формулой Муавра*.**

Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик французского происхождения.

***Заслуги Муавра:***

•открыл (1707) формулу Муавра для возведения в степень (и извлечения корней) комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме;

•первый стал использовать возведение в степень бесконечных рядов;

•большой вклад в теорию вероятностей: доказал частный случаи теоремы Лапласа, провёл вероятностное исследование азартных игр и ряда статистических данных по народонаселению.

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

**содержание**

***Пример 6.*** Найти формулы $sin2\varphi$ и $cos2\varphi$.

*Решение.*

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.

Приравнивая, получим $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$.

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Получили известные формулы двойного угла.

**содержание**

## *г) Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа*

***Корнем n-ой степени из комплексного числа*** $z$ называется комплексное число $w$, удовлетворяющее равенству $w^n=z$, т.е. $\sqrt[n]{z} = w$, если $w^n=z$.

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = w^n = [\rho(\cos\psi + i\sin\psi)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда имеем $\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in Z.$

То есть $\rho = \sqrt[n]{r}, \ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}.$

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = w$ принимает вид

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left( \cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

где $k = \overline{0, n-1}$ (т.е. от 0 до $n$-$1$).

**содержание**

Таким образом, *извлечение корня $n$-ой степени из комплексного числа $z$ всегда возможно и дает $n$ различных значений. Все значения корня $n$-ой степени расположены на окружности радиуса* $\sqrt[n]{|z|}$ *с центром в нуле и делят эту окружность на $n$ равных частей.*

***Пример 7.*** Найти все значения $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$.

*Решение.*

Вначале представим число $z=1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

В данном случае $x=1,\quad y=\sqrt{3},$ таким образом, $r=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2,$

$$\varphi = arctg\,\frac{\sqrt{3}}{1} = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

Используя формулу $\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$

где $k=0,1,2,\ldots,(n-1),$ имеем:

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3}\right),\ k=0,\ 1,\ 2.$$

Запишем все значения $\sqrt[3]{z}$:

при $k=0,\ z_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right);$

при $k=1,\ z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right);$

при $k=2,\ z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$

*Ответ:* $z_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right);\ z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right);$

$z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$

**содержание**

# Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение комплексного числа.
2. Какое комплексное число называется чисто мнимым?
3. Какие два комплексных числа называются сопряженными?
4. Объясните, что значит сложить комплексные числа, заданные в алгебраической форме; умножить комплексное число на действительное.
5. Объясните принцип деления комплексных чисел, заданных в алгебраической форме.
6. Запишите в общем виде целые степени мнимой единицы.
7. Что означает возведение комплексного числа, заданного алгебраической формой в степень ( n- натуральное число)?
8. Расскажите как изображаются комплексные числа на плоскости.

9. Какая форма записи называется тригонометрической формой комплексных чисел?

10. Сформулируйте определение модуля и аргумента комплексного числа.

11. Сформулируйте правило умножения комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.

12. Сформулируйте правило нахождения частного двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

13. Сформулируйте правило возведения в степени комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

14. Сформулируйте правило извлечения корня n-ой степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме.

15. Расскажите о значении корня n-ой степени из единицы и о сфере его применения.