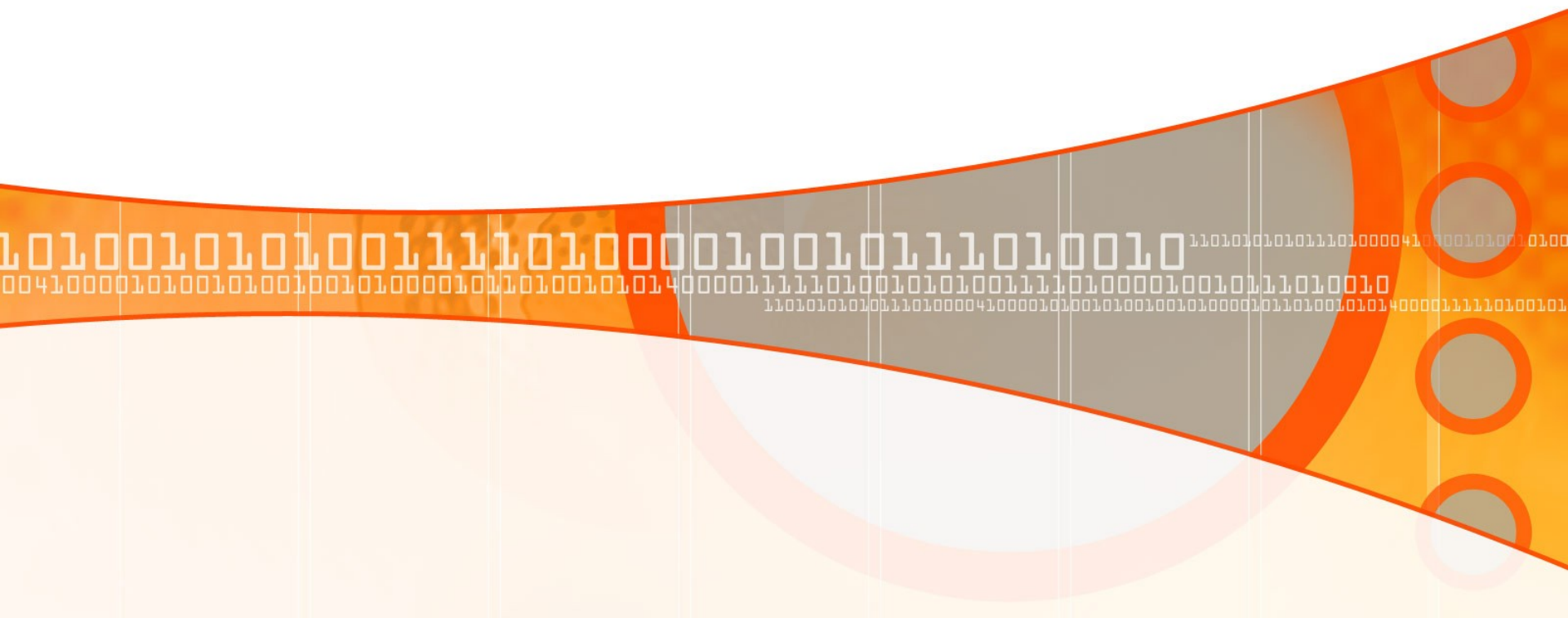


Однородные тригонометрические уравнения



Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени.

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= 0 & | : \cos x \\ \frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} &= \frac{0}{\cos x} \\ a \operatorname{tg} x + b &= 0 \\ \operatorname{tg} x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Замечание.

Деление на $\cos x$ допустимо, поскольку решения уравнения $\cos x = 0$ не являются решениями уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$.

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ называют *однородным тригонометрическим уравнением второй степени*.

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$$
$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$
$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

Далее, вводим новую переменную $\operatorname{tg} x = t$ и решаем методом замены переменной.

Замечание. Если в данном уравнении $a = 0$ или $c = 0$ то, уравнение решается методом разложения на множители.



Пример 1

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0 \quad | : \cos x$$

$$\frac{2 \sin x}{\cos x} - \frac{3 \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2

$$\sin 2x + \cos 2x = 0 \quad | : \cos 2x$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\cos 2x} = \frac{0}{\cos 2x}$$

$$\operatorname{tg} 2x + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3 \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$$

Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ : $\frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} 2 + \pi k; n, k \in \mathbb{Z}.$

Пример 4

$$\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

$$\cos x (\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0, & | : \cos x \\ \cos x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ : } -\frac{\pi}{6} + \pi k; \quad \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1. Решите уравнение $\sqrt{3} \sin 4x + \cos 4x = 0$ и найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$
3. $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0;$

Домашнее задание: 1) Написать конспект урока в тетради;
2) Решить задачи для самостоятельного решения в тетради.