

Глава. Преобразование тригонометрических выражений

Здравствуйтесь, ребята. Сегодня начинаем изучать новую главу. В этой главе речь пойдет о преобразовании тригонометрических выражений. Для этого используются различные тригонометрические формулы. Сегодня мы изучим так называемые формулы сложения: синус, косинус, тангенс, котангенс суммы и разности аргументов.

Синус и косинус суммы и разности аргументов

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Тангенс суммы и разности аргументов

$$tg(x + y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx tgy}$$

$$tg(x - y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx tgy}$$

Котангенс суммы и разности аргументов

$$\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y - 1}{\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y}$$

$$\operatorname{ctg}(x - y) = \frac{\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y + 1}{\operatorname{ctg}y - \operatorname{ctg}x}$$

Пример 1

Вычислить:

$$\begin{aligned}\sin 75^{\circ} &= \sin(45^{\circ} + 30^{\circ}) = \\ &= \sin 45^{\circ} \cos 30^{\circ} + \cos 45^{\circ} \sin 30^{\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$



Пример 2

Вычислить:

$$\begin{aligned}\cos 75^{\circ} &= \cos(45^{\circ} + 30^{\circ}) = \\ &= \cos 45^{\circ} \cos 30^{\circ} - \sin 45^{\circ} \sin 30^{\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$



Пример 3

Вычислить:

$$\sin \frac{4\pi}{15} \cos \frac{\pi}{15} + \cos \frac{4\pi}{15} \sin \frac{\pi}{15}$$

Решение:

Заданное выражение можно «свернуть» в синус суммы аргументов:

$$\begin{aligned} & \sin \frac{4\pi}{15} \cos \frac{\pi}{15} + \cos \frac{4\pi}{15} \sin \frac{\pi}{15} = \\ & = \sin \left(\frac{4\pi}{15} + \frac{\pi}{15} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



Пример 4

Вычислить: $tg75^0$

Решение.

$$\begin{aligned} tg75^0 &= tg(45^0 + 30^0) = \frac{tg45^0 + tg30^0}{1 - tg45^0 tg30^0} = \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$



Пример 5

Вычислить: $tg15^0$

Решение.

$$\begin{aligned} tg15^0 &= tg(45^0 - 30^0) = \frac{tg45^0 - tg30^0}{1 + tg45^0 tg30^0} = \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$



Пример 6

Вычислить: $\frac{\operatorname{tg} 27^{\circ} + \operatorname{tg} 18^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 27^{\circ} \operatorname{tg} 18^{\circ}}$

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg} 27^{\circ} + \operatorname{tg} 18^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 27^{\circ} \operatorname{tg} 18^{\circ}} = \operatorname{tg}(27^{\circ} + 18^{\circ}) = \\ = \operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$$



Пример 7

Вычислить:
$$\frac{\operatorname{tg} 27^{\circ} + \operatorname{tg} 18^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 27^{\circ} \operatorname{tg} 18^{\circ}}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} 27^{\circ} + \operatorname{tg} 18^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 27^{\circ} \operatorname{tg} 18^{\circ}} &= \operatorname{tg}(27^{\circ} + 18^{\circ}) = \\ &= \operatorname{tg} 45^{\circ} = 1 \end{aligned}$$



Пример 8

$$\text{Решить уравнение : } \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x\right) + \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x\right) = \sqrt{3}$$

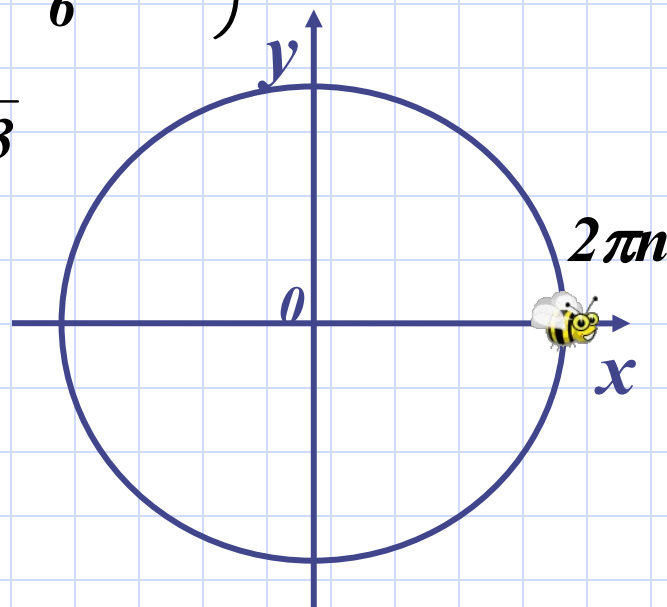
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cos x = \sqrt{3}$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ : $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



[содержание](#)

Задания для самостоятельного решения:

19.1. Представив 105° как сумму $60^\circ + 45^\circ$, вычислите:

а) $\sin 105^\circ$; б) $\cos 105^\circ$.

Найдите значение выражения:

О19.10. а) $\cos 107^\circ \cos 17^\circ + \sin 107^\circ \sin 17^\circ$;

б) $\cos 36^\circ \cos 24^\circ - \sin 36^\circ \sin 24^\circ$;

в) $\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ$;

г) $\sin 51^\circ \cos 21^\circ - \cos 51^\circ \sin 21^\circ$.

Решите уравнение:

О19.23. а) $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos x = 0,5$;

О19.14. а) $\cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x = -1$;

б) $\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \cos 3x = 0,5$.

Вычислите:

20.1. а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$;

б) $\operatorname{tg} 105^\circ$;

20.2. а) $\frac{\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg} 25^\circ \operatorname{tg} 20^\circ}$;

б) $\frac{1 - \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 65^\circ}{\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 65^\circ}$;

Домашнее задание: 1) Написать конспект урока в тетради;
2) Решить задачи для самостоятельного решения
в тетради.



содержание