Однородные тригонометрические уравнения

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют *однородным тригонометрическим уравнением первой степени.*

$$a \sin x + b \cos x = 0 \quad \Big| : \cos x$$

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

Замечание.

Деление на $\cos x$ допустимо, поскольку решения уравнения $\cos x = 0$ не являются решениями уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$.

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ называют *однородным тригонометрическим уравнением второй степени.*

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \quad \Big|\; : \cos^2 x$$

$$\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{c\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a\,tg^2 x + b\,tg\,x + c = 0$$

Далее, вводим новую переменную $tg\,x = t$ и решаем методом замены переменной.

<u>Замечание.</u> Если в данном уравнении $a = 0$ или $c = 0$ то, уравнение решается методом разложения на множители.

Пример 1

$$2\sin x - 3\cos x = 0 \quad \Big|: \cos x$$

$$\frac{2\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$2tgx - 3 = 0$$

$$tgx = \frac{3}{2}$$

$$x = arctg\frac{3}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

$$Ответ:\ arctg\frac{3}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

Пример 2

$$\sin 2x + \cos 2x = 0 \quad \Big|: \cos 2x$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\cos 2x} = \frac{0}{\cos 2x}$$

$$tg2x + 1 = 0$$

$$tg2x = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$$

$$Ответ:\ -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

Пример 3

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0 \qquad \Big| : \cos^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$tg^2 x - 3tg x + 2 = 0$$

Пусть $tgx = t$, *тогда*

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ tgx = 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z \\ x = arctg 2 + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n;\ arctg 2 + \pi k;\ n, k \in Z.$

Пример 4

$$\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0$$

$$\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}\sin x+\cos x=0, \qquad \Big| : \cos x\\ \cos x=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}tgx+1=0,\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx=-\frac{1}{\sqrt{3}},\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi k,\ k\in Z,\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z,\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.\end{array}\right.$$

$$Ответ:\ -\frac{\pi}{6}+\pi k;\quad \frac{\pi}{2}+\pi n;\ n,k\in Z.$$

Задания для самостоятельного решения:

1. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 4x + \cos 4x = 0$ и найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$

3. $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0;$

Домашнее задание: 1) Написать конспект урока в тетради;
2) Решить задачи для самостоятельного решения в тетради.