Глава. Преобразование тригонометрических выражений

Здравствуйте, ребята. Сегодня начинаем изучать новую главу. В этой главе речь пойдет о преобразовании тригонометрических выражений. Для этого используются различные тригонометрические формулы. Сегодня мы изучим так называемые формулы сложения: синус, косинус, тангенс, котангенс суммы и разности аргументов.

Запишите число 19.01.2026 и тему урока: Формулы сложения.

Синус и косинус суммы и разности аргументов

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y \qquad \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y \qquad \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y \qquad \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y \qquad \sin x \sin y$$

Тангенс суммы и разности аргументов

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgxtgy}$$

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgxtgy}$$

Котангенс суммы и разности аргументов

$$ctg(x+y)=\frac{ctgx\,ctgy-1}{ctgx+ctgy}$$

$$ctg(x-y)=\frac{ctgx\,ctgy+1}{ctgy-ctgx}$$

Пример 1 Вычислить:

$$\sin 75^0 = \sin(45^0 + 30^0) =$$

$$= \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

содержание

Пример 2 Вычислить:

$$\cos 75^0 = \cos(45^0 + 30^0) =$$

$$= \cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \sin 30^0 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

содержание

Пример 3 Вычислить:

$$\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}$$

Решение:

Заданное выражение можно «свернуть» в синус суммы аргументов:

$$\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}=$$

$$=\sin\left(\frac{4\pi}{15}+\frac{\pi}{15}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 4 **Вычислить:** $tg75^0$

Решение.

$$tg75^0 = tg\left(45^0+30^0\right) = \frac{tg45^0+tg30^0}{1-tg45^0\,tg30^0} =$$

$$= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

содержание

Пример 5

Вычислить: $tg15^0$

Решение.

$$tg15^0 = tg\left(45^0 - 30^0\right) = \frac{tg45^0 - tg30^0}{1 + tg45^0\, tg30^0} =$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

содержание

Пример 6

Вычислить: $$\frac{tg27^0+tg18^0}{1-tg27^0tg18^0}$$

Решение.

$$\frac{tg27^0+tg18^0}{1-tg27^0tg18^0}=\ tg\left(27^0+18^0\right)=$$

$$=tg45^0=1$$

содержание

Пример 7

Вычислить: $$\frac{tg27^0+tg18^0}{1-tg27^0tg18^0}$$

Решение.

$$\frac{tg27^0+tg18^0}{1-tg27^0tg18^0}= \ tg\left(27^0+18^0\right)=$$

$$=tg45^0=1$$

Пример 8

$$\text{Решить уравнение}: \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sqrt{3}$$

$$\boxed{\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y}$$

$$\boxed{\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y}$$

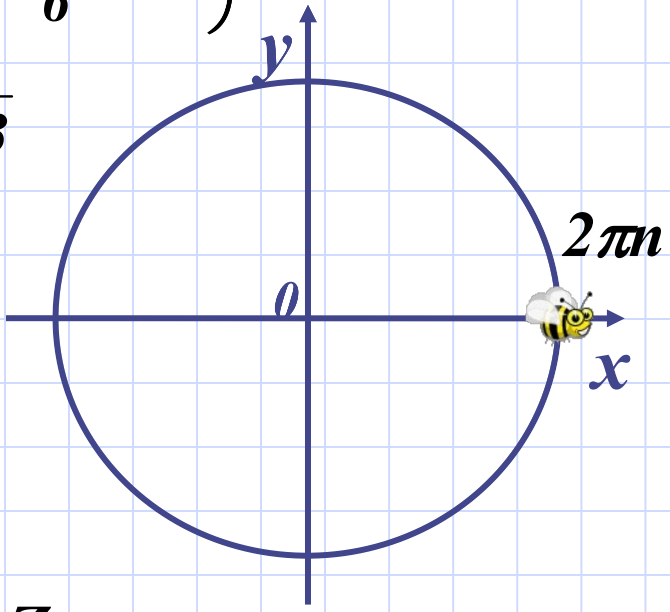
$$\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)+\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}$$

$$\cos x=1$$

$$x=2\pi n, n\in Z$$



$$\text{Ответ}: 2\pi n, n\in Z$$

Задания для самостоятельного решения:

19.1. Представив 105° как сумму 60° + 45°, вычислите:
а) $\sin 105°$; б) $\cos 105°$.

Найдите значение выражения:

○**19.10.** а) $\cos 107° \cos 17° + \sin 107° \sin 17°$;

б) $\cos 36° \cos 24° - \sin 36° \sin 24°$;

в) $\sin 63° \cos 27° + \cos 63° \sin 27°$;

г) $\sin 51° \cos 21° - \cos 51° \sin 21°$.

Решите уравнение:

○**19.23.** а) $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos x = 0{,}5$;

○**19.14.** а) $\cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x = -1$;
б) $\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \cos 3x = 0{,}5$.

Вычислите:

20.1. а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$;

б) $\operatorname{tg} 105°$;

20.2. а) $\frac{\operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 20°}{1 - \operatorname{tg} 25° \operatorname{tg} 20°}$;

б) $\frac{1 - \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 65°}{\operatorname{tg} 70° + \operatorname{tg} 65°}$;

Домашнее задание: 1) Написать конспект урока в тетради;
2) Решить задачи для самостоятельного решения в тетради.