

Формулы понижения степени

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Формулы понижения степени

$$tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1 - \cos 2x}{2}}{\frac{1 + \cos 2x}{2}} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$tg x \cdot ctg x = 1 \Rightarrow ctg^2 x = \frac{1}{tg^2 x} \Rightarrow ctg^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$$

Пример:

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} > 0, \cos \frac{\alpha}{2} < 0$$

Пусть $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$. Найти $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

Решение:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)}{2} = \frac{25}{26} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{12}{13}}{2} = \frac{1}{26} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{5}{\sqrt{26}}}{-\frac{1}{\sqrt{26}}} = -5 \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{5}$$

$$\text{Ответ: } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\sqrt{26}}, \cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{26}}, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -5, \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{5}$$

Пример:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

Пусть $\sin \alpha = 0,2$. Найти $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Решение:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$t = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2}$$

$$\cos t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = 0,2$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - 0,2}{2} = 0,4$$

Ответ: 0,4.

Пример:

Решить уравнение $1 - \cos x = \sin x \cdot \sin \frac{x}{2}$.

Решение:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 - \cos \frac{x}{2}) = 0$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0 \quad \text{или} \quad 1 - \cos \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Домашнее задание:

- Написать конспект;
- Выполнить задания:

О21.11. а) Дано: $\cos t = \frac{3}{4}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Вычислите: $\cos \frac{t}{2}$; $\sin \frac{t}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$; $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$.

О21.26. а) $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$;

О21.28. Решите уравнение:

а) $\sin^2 2x = 1$;

б) $\cos^2 4x = \frac{1}{2}$;