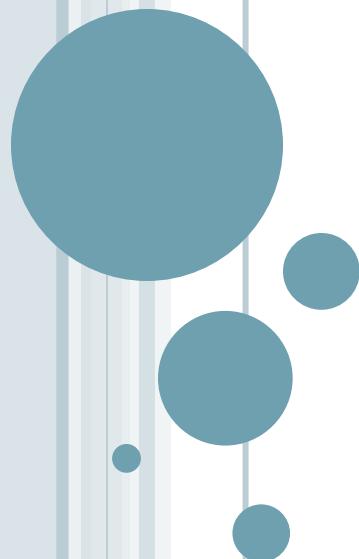


ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

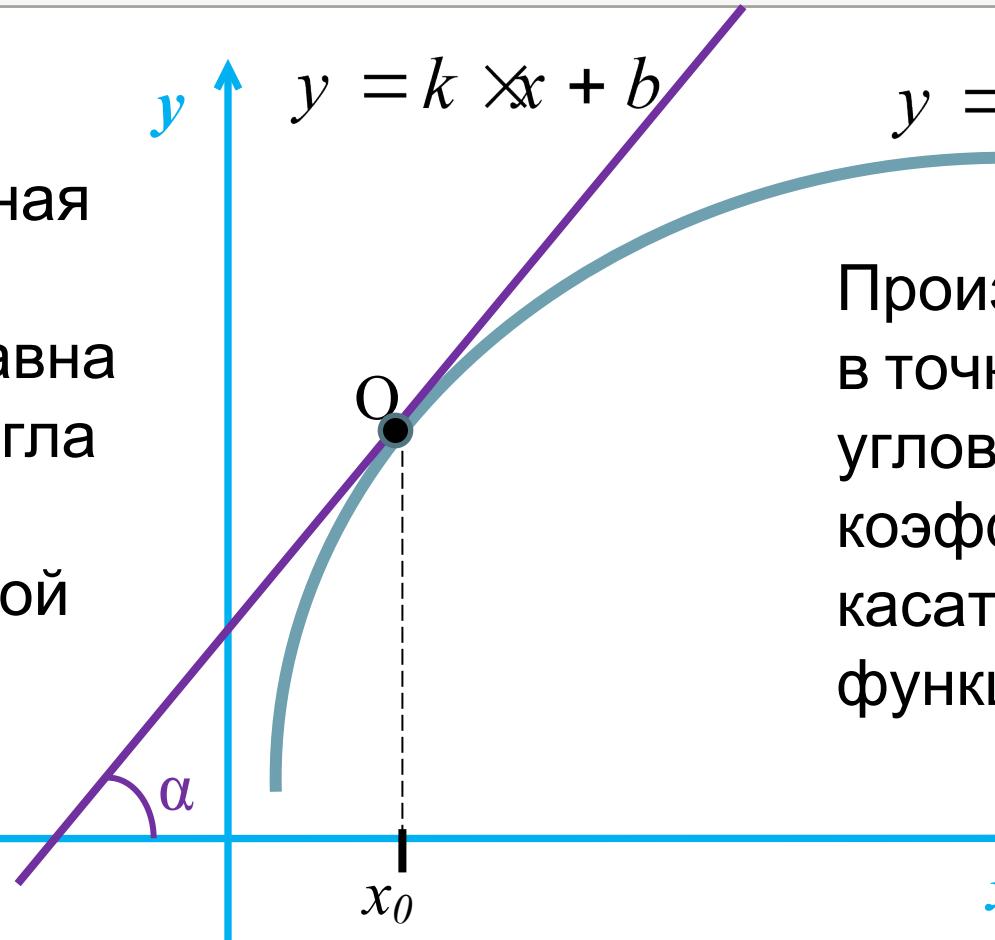


Геометрический смысл производной

Производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной

$$y = f(x)$$

Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$f'(x_0) = k$$

$$\operatorname{tg} \alpha = k$$

№ 1

Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной к графику функции:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \text{в точке с абсциссой } x_0 = 0.$$

Решени

$$f'(x) = 2x - 2; \quad \text{е}$$

$$k = f'(x_0) = f'(0) = 2 \times 0 - 2 = -2;$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = -2$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} (-2) = -\operatorname{arctg} 2 = -63^\circ 26' 6''$$

$$\alpha_+ = 180^\circ - 63^\circ 26' 6'' = 116^\circ 33' 54''$$

Ответ: $k = -2$; $\alpha_+ = 116^\circ 33' 54''$

№ 2

Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной к графику функции:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3; \quad x_0 = -1$$

Решени
е

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(-1) = 3 + 6 = 9$$

$$k = f'(-1) = 9$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 9$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 9 = 83^\circ 39' 36''$$



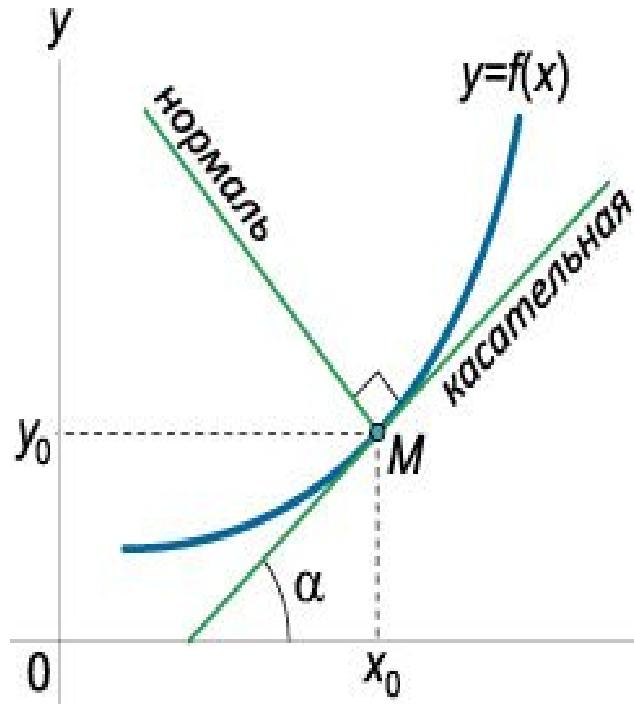
Уравнение касательной и нормали

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение нормали к графику функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$y_n = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$



№ 3

Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в заданной точке:

$$f(x) = x^2 - 4, \quad x_0 = 3$$

Решение

∴

$$1) f(x_0) = 3^2 - 4 = 5;$$

$$2) f'(x) = 2x ;$$

$$3) f'(x_0) = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$4) y_k = 5 + 6(x - 3)$$

$$y_k = 6x - 13$$

$$5) y_n = 5 - \frac{1}{6}(x - 3)$$

$$y_n = -\frac{1}{6}x + 5\frac{1}{2}$$



№ 4

Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в заданной точке:

$$f(x) = 4 - x - x^2, x_0 = -3$$

Решение

$$1) f(-3) = 4 + 3 - 9 = -2$$

$$2) f' = -1 - 2x$$

$$3) f'(-3) = -1 + 6 = 5$$

$$4) y_{\text{как}} = -2 + 5(x + 3) = -2 + 5x + 15 = 5x + 13$$

$$5) y_{\text{норм}} = -2 - \frac{1}{5}(x + 3) = -2 - \frac{1}{5}x - \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}x - 2\frac{3}{5}$$

№ 5

Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной. Составить уравнение касательной к графику функции:

$$f(x) = 2x - 3x^4 + 12, \quad x_0 = -2$$

Решение 1) $f(-2) = -4 - 48 + 12 = -40$

2) $f' = 2 - 12x^3$

3) $f'(-2) = 2 + 96 = 98, \quad k = 98$

4) $\alpha = \arctg 98 = 89^\circ 24' 55''$

5) $y_k = -40 + 98(x + 2) = 98x + 156$



Задания для самостоятельного решения:

Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной.
Составить уравнение касательной к графику функции:

№ 6

$$f(x) = x^3 + 1; \quad x_0 = -1$$

№ 7

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 7; \quad x_0 = -4$$

№ 8

$$f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 2x + 1; \quad x_0 = 1$$

