**Дата 06.04.2020**

**Группа:** МД-19

**Тема «Решение логарифмических уравнений и неравенств»**

**Тип урока:** Урок применения знаний, умений и навыков в ходе систематизации и обобщения изученного материала.

***Учащиеся должны:***

**Знать:**

* Понятия степени и логарифма;
* Понятие степени с различными показателями;
* Свойства степеней и логарифмов.

**Уметь:**

* находить значения корня, степени, логарифма;
* выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов;
* использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

**Ход урока:**

**1.Подготовка к работе.**

В тетради дать ответы на вопросы:

1.1 Дайте определение логарифма.

1.2 Какие логарифмы называются десятичными, натуральными?

1.3 Какие свойства логарифмов вы знаете?

1.3 Сформулируйте основное логарифмическое свойство.

**2.Работа в тетради**

2.1) Вычислить:

; ; ; ; ; ; ; ; .

2.2) Вычислить, используя основное логарифмическое тождество:

; ; ; ; .

2.3) решить уравнения:

; ; ; ; ; .

**3.** Работа над углублением знаний через решения логарифмических уравнений и неравенств

**1.** Решение уравнений log0.2(x2+6x+8)>log0.2(5x+10)

x2+6x+8>0

1.  ответ: 

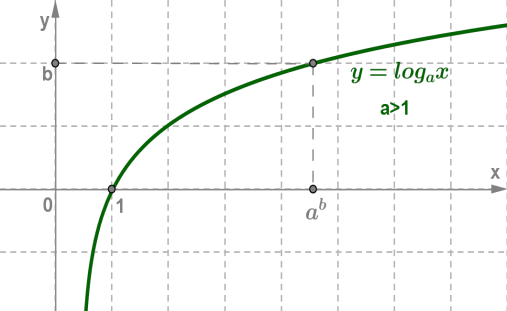
2.  ответ: 

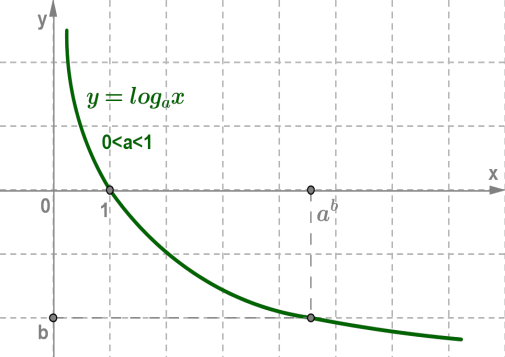
3.  ответ: 

4.  ответ: 

**3.** Решение неравенств

Повторение свойств логарифмической функции ( по готовому чертежу)





1.  ответ: 
2.  ответ: решений нет
3.  ответ: 
4.  ответ: 
5. **Решить уравнение графически (желательно на миллиметровой бумаге)**

**І вариант** (фамилии от «А» до «З») **ІІ вариант**(фамилии от «И» до «Я»)

1) 1)

2) 2)

**VІ этап - Домашнее задание**

Составить кроссворд по теме показательная и логарифмическая функции.

**2.** Сообщение по теме «Исторические сведения о создании логарифмов».

Логарифмическая функция в природе, основоположники логарифмов (Презентация).

**Список литературы**

**Учебники и учебные пособия**

Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика. Издательство «Дрофа», 2010.

Пехлецкий И.Д. Математика. Издательский центр «Академия», 2012.

Редакция Яковлева Г.Н. Математика в 2х частях . Издательский дом «Оникс», 2011.

**Сборники задач**

Богомолов Н.В., Самойленко П.И. «Сборник задач по математике». Издательство «Дрофа»,2010.

Богомолов Н.В., Самойленко П.И. «Математика. Дидактические задания.» Издательство «Дрофа»,2010.

**Интернет ресурсы**

<http://platea.pntic.mec.es/aperez4/curvashistoria.pdf>

* **"Решение логарифмических уравнений" (N 192118)** <http://school-collection.edu.ru/catalog/res/ef77265a-595e-428b-868d-02f73703c187/?from=a87d6303-ae07-46dd-a18a-855c725fb448&>
* <http://ege.yandex.ru/math/X>
* <http://www.mathege.ru:8080/or/ege/Main>

**Примеры решения уравнений неравенств**

**Пример 1.** Решите уравнение:

\[ \lg(x^2-6) = \lg(8+5x). \]

**Решение.** В область допустимых значений входят только те *x*, при которых выражение, находящееся под знаком логарифма, больше нуля. Эти значения определяются следующей системой неравенств:

\[ \begin{cases} x^2-6>0, \\ 8+5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 6, \\ x>-1,6. \end{cases} \Leftrightarrow \]

\[ \begin{cases} x\in(-\mathcal{1};-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6};+\mathcal{1}), \\ x\in (-1,6;+\mathcal{1}). \end{cases} \]

\[ -1,6 = -\sqrt{2,56}> -\sqrt{6}, \]

получаем промежуток, определяющий область допустимых значений данного логарифмического уравнения:

\[ x\in(\sqrt{6};+\mathcal{1}). \]

На основании теоремы 1, все условия которой здесь выполнены, переходим к следующему равносильному квадратичному уравнению:

\[ x^2-6 = 8 + 5x\Leftrightarrow x^2-5x-14=0\Leftrightarrow \]

\[ x_1 = 7,\, x_2 = -2. \]

В область допустимых значений входит только первый корень.

**Ответ:** x = 7.

**Пример 2.** Решите уравнение:

\[ \log_{0,2}(-x^2+4x+5)=\log_{0,2}(-x-31). \]

**Решение.** Область допустимых значений уравнения определяется системой неравенств:

\[ \begin{cases} -x^2+4x+5>0, \\ -x-31>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<5, \\ x<-31. \end{cases} \]

Очевидно, что эти два условия противоречат друг другу. То есть нет ни одного такого значения *x*, при котором одновременно выполнялись бы оба неравенства. Область допустимых значений уравнения является пустым множеством, а значит решений у данного логарифмического уравнения нет.

**Ответ:** корней нет.

Обратите внимание, что в этом задании нам вообще не пришлось искать корни уравнения. Достаточно оказалось определить, что его область допустимых значений не содержит ни одного действительно числа. Это одно из преимуществ такой последовательности решения логарифмических уравнений и неравенств (начинать с определения области допустимых значений уравнения, а затем решать его путем равносильных преобразований).

**Примет 3.** Решите уравнение:

\[ 3\log_{\frac{1}{2}}^2 x +5\log_{\frac{1}{2}} x - 2=0. \]

**Решение.**Область допустимых значений уравнения определяется здесь легко: *x* > 0.

Используем подстановку:

\[ t = \log_{\frac{1}{2}} x. \]

Уравнение принимает вид:

\[ 3t^2 + 5t -2 = 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1= \frac{1}{3},\\ t_2=-2.\end{array}\right. \]

Обратная подстановка:

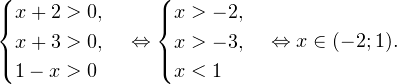
\[ \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{3}, \\ \log_{\frac{1}{2}} x = -2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ x = 4. \end{array}\right. \]

Оба **ответа** входят в область допустимых значений уравнения, поскольку являются положительными числами.

**Пример 4.** Решите уравнение:

\[ \log_{0,4}(x+2)+\log_{0,4}(x+3)=\log_{0,4}(1-x). \]

**Решение.**Вновь начнем решение с определения области допустимых значений уравнения. Она определяется следующей системой неравенств:



Воспользовавшись правилом сложения логарифмов, переходим к равносильному в области допустимых значений уравнению:

\[ \log_{0,4}(x+2)(x+3)=\log_{0,4}(1-x)\Rightarrow \]

Основания логарифмов одинаковы, поэтому в области допустимых значений можно перейти к следующему квадратному уравнению:

\[ (x+2)(x+3) = (1-x)\Leftrightarrow x^2+6x+5 = 0\Leftrightarrow \]

\[ \left[\begin{array}{l}x_1 =-5, \\ x_2 = -1.\end{array} \]

Первый корень не входит в область допустимых значений уравнения, второй — входит.

**Ответ:** *x* = -1.

**Пример 5.** Решите уравнение:

\[ x^{\log_3 x} = 81. \]

**Решение.** Будем искать решения в промежутке *x* > 0, *x*≠1. Преобразуем уравнение к равносильному:

\[ x^{\log_3 x} = x^{\log_x 81}\Leftrightarrow x^{\log_3 x} = x^{\frac{4}{\log_3 x}}\Leftrightarrow \]

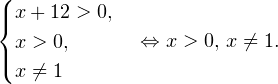
\[ \log_3^2 x = 4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2, \\ \log_3 x = -2 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9,\\ x =\frac{1}{9}. \end{array}\right. \]

Оба **ответа** входят в область допустимых значений уравнения.

**Пример 6.** Решите уравнение:

\[ \log_4(x+12)\cdot \log_x 2 = 1. \]

**Решение.** Система неравенств, определяющая область допустимых значений уравнения, имеет на этот раз вид:



Используя свойства логарифма, преобразуем уравнение к равносильному в области допустимых значений уравнению:

\[ \frac{\log_2(x+12)}{2\log_2 x} = 1. \]

Используя формулу перехода к новому основанию логарифма, получаем:

\[ \log_x(x+12) = 2 \Rightarrow x^2-x-12 = 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4, \\ x_2 = -3. \end{array}\right. \]

В область допустимых значений входит только один **ответ:** *x* = 4.

**Теорема 2.** Если *f*(*x*) > 0 и *g*(*x*) > 0, то:  
при *a* > 1 логарифмическое неравенство log a *f*(*x*) > log a *g*(*x*) равносильно неравенству того же смысла: *f*(*x*) > *g*(*x*);  
при 0 < *a* < 1 логарифмическое неравенство log a *f*(*x*) > log a *g*(*x*) равносильно неравенству противоположного смысла: *f*(*x*) < *g*(*x*).

**Пример 7.** Решите неравенство:

\[ \log_{0,5}(x^2+x-6)\geqslant \log_{0,5}(x+4). \]

**Решение.** Начнем с определения области допустимых значений неравенства. Выражение, стоящее под знаком логарифмической функции, должно принимать только положительные значения. Это значит, что искомая область допустимых значений определяется следующей системой неравенств:

\[ \begin{cases} x^2+x-6>0, \\ x+4>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\mathcal{1};-3)\cup(2;+\mathcal{1}), \\ x>-4 \end{cases} \]

\[ \Leftrightarrow x\in(-4;-3)\cup(2;+\mathcal{1}). \]

Так как в основании логарифма стоит число, меньшее единицы, соответствующая логарифмическая функция будет убывающей, а потому равносильным по теореме 2 будет переход к следующему квадратичному неравенству:

\[ x^2+x-6\leqslant x+4\Leftrightarrow x^2\leqslant 10\Leftrightarrow x\in[-\sqrt{10};\sqrt{10}]. \]

Окончательно, с учетом области допустимых значений получаем **ответ:**

\[ x\in[-\sqrt{10}; -3)\cup(2;\sqrt{10}]. \]

**Пример 8.** Решите неравенство:

\[ 11\cdot \log_9(x^2-12x+27)\leqslant 12+\log_9\frac{(x-9)^{11}}{x-3}. \]

**Решение.** Вновь начнем с определения области допустимых значений:

\[ \begin{cases} x^2-12x+27>0, \\ \frac{(x-9)^{11}}{x-3}>0 \end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\mathcal{1};3)\cup(9;+\mathcal{1}). \]

На множестве допустимых значений неравенства проводим равносильные преобразования:

\[ 11\cdot \log_9(x-9)(x-3)-\log_9\frac{(x-9)^{11}}{x-3}\leqslant 12 \]

\[ \log_9\left[(x-9)^{11}(x-3)^{11}\right]-\log_9\frac{(x-9)^{11}}{x-3}\leqslant 12 \]

\[ \log_9\frac{(x-3)^{12}(x-9)^{11}}{(x-9)^{11}}\leqslant \log_9 9^{12}. \]

После сокращения и перехода к равносильному по теореме 2 неравенству получаем:

\[ (x-3)^{12}\leqslant 9^{12}\Leftrightarrow -9\leqslant x-3 \leqslant 9\Leftrightarrow x\in[-6;12]. \]

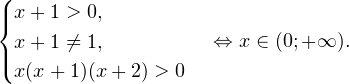
С учетом области допустимых значений получаем окончательный **ответ:**

\[ x \in [-6;3)\cup(9;12]. \]

**Пример 9.** Решите логарифмическое неравенство:

\[ \log_{x+1}(x^3+3x^2+2x)<2. \]

**Решение.** Область допустимых значений неравенства определяется следующей системой:



Видно, что в области допустимых значений выражение, стоящее в основании логарифма, всегда больше единицы, а потому равносильным по теореме 2 будет переход к следующему неравенству:

\[ x^3+3x^2+2x<x^2+2x+1\Leftrightarrow x^3+2x^2-1<0\Leftrightarrow \]

\[ (x+1)(x^2+x-1)<0\Leftrightarrow \]

\[ x\in\left(-\mathcal{1};-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(-1;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right). \]

С учетом области допустимых значений получаем окончательный ответ:

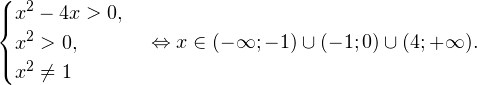
\[ x\in\left(0;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right). \]

**Пример 10.** Решите неравенство:

\[ \frac{2\log_3(x^2-4x)}{\log_3 x^2}\leqslant 1. \]

**Решение.**

Область допустимых значений неравенства определяется системой неравенств:



**I способ.** Воспользуемся формулой перехода к новому основанию логарифма и перейдем к равносильному в области допустимых значений неравенству:

\[ \log_{x^2}(x^2-4x)^2\leqslant 1. \]

Неравенство будет равносильно двум системам. Первой:

\[ \begin{cases} x\in(-1;0), \\ (x^2-4x)^2\geqslant x^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-1;0), \\ x^2(x-5)(x-3)\geqslant 0 \end{cases}\Leftrightarrow \]

\[ x\in (-1;0). \]

И второй:

\[ \begin{cases}x\in(-\mathcal{1};-1)\cup(4;+\mathcal{1}), \\ x^2(x-5)(x-3)\leqslant 0 \end{cases}\Leftrightarrow x\in(4; 5]. \]

Итак, окончательный**ответ:**

\[ x\in(-1;0)\cup(4;5]. \]

**II способ.**Решаем методом интервалов. Преобразуем неравенство к виду:

\[ \frac{2\log_3(x^2-4x)-\log_3 x^2}{\log_3 x^2}\leqslant 0\Leftrightarrow \]

Вычтем из знаменателя \log_3 1. Это ничего не изменит, поскольку \log_3 1 = 0.

\[ \frac{\log_3(x^2-4x)^2-\log_3 x^2}{\log_3 x^2-\log_3 1}\leqslant 0 \]

С учетом того, что выражения \log_3 f - \log_3 g и f-g — одного знака при f,\,g>0, в области допустимых значений имеет место следующий равносильный переход:

\[ \frac{(x^2-4x)^2-x^2}{x^2-1}\leqslant 0\Leftrightarrow \]

\[ \frac{(x^2-5x)(x^2-3x)}{x^2-1}\leqslant 0. \]

[Решение дробно-рационального неравенства](https://yourtutor.info/wp-content/uploads/2012/02/MSP12521a194ed409ea775600002b2fici3d132i6ic.gif)

Множество решений данного неравенства

Итак, x\in(-1;1)\cup [3;5], а с учетом области допустимых значений получаем тот же **результат**: x\in(-1;0)\cup (4;5].

Итак, что нужно для того, чтобы решать **логарифмические уравнения и неравенства**?

* Во-первых, *внимание*. Не допускайте ошибок в проводимых преобразованиях. Следите за тем, чтобы каждое ваше действие не расширяло и не сужало область допустимых значений неравенства, то есть не приводило ни к потере, ни к приобретению посторонних решений.
* Во-вторых, *умение мыслить логически*.
* В-третьих, четкое *знание* свойств всех элементарных функций (степенных, рациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических), изучаемых в курсе математики и *понимание* их смысла