**Тема: «Вероятность и ее свойства»**

## 1. Понятие о случайном событии. Виды событий. Вероятность события

Всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий, будем называть ***испытанием.***

Результат этого действия или наблюдения называется ***событием***.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется ***случайным***. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют ***достоверным***, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти,- ***невозможным****.*

События называются ***несовместными***, если каждый раз возможно появление только одного из них.

События называются ***совместными***, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются ***противоположными***, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: *А, В, С, Д,* … .

***Полной системой*** событий А1, А2, А3, … , Аn называется совокупность несовместных событий, наступление хотя бы одного из которых обязательно при данном испытании.

Если полная система состоит из двух несовместных событий, то такие события называются противоположными и обозначаются А и .

**Пример.** В коробке находится 30 пронумерованных шаров. Установить, какие из следующих событий являются невозможными, достоверными, противоположными:

достали пронумерованный шар *(А);*

достали шар с четным номером *(В);*

достали шар с нечетным номером *(С);*

достали шар без номера *(Д).*

Какие из них образуют полную группу?

Решение*. А* - достоверное событие; *Д* - невозможное событие;

*В* и *С* - противоположные события.

Полную группу событий составляют *А* и *Д, В* и *С*.

***Вероятность события***, рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

## 2. Классическое определение вероятности

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется ***вероятностью*** этого события и обозначается символом *Р(А).*

***Определение.*** Вероятностью события *А* называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события *А*, к числу *n* всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е.

.

Следовательно, для нахождения вероятности события необходимо, рассмотрев различные исходы испытания, подсчитать все возможные несовместные исходы *n,* выбрать число интересующих нас исходов m и вычислить отношение *m* к *n*.

**Из этого определения вытекают следующие свойства:**

1. Вероятность любого испытания есть неотрицательное число, не превосходящее единицы.

Действительно, число m искомых событий заключено в пределах . Разделив обе части на *n*, получим

.

2. Вероятность достоверного события равна единице, т.к. .

3. Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку .

**Задача 1.** В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение. Общее число различных исходов есть *n*=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле, получим

.

**Задача 2.** В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

Решение. Число всех равновозможных независимых исходов *n* равно числу сочетаний из 18 по 5 т.е.



Подсчитаем число m, благоприятствующих событию А. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

.



Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся качественных равно

.

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей, поэтому общее число комбинаций *m* составляет

.

Искомая вероятность события А равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

.

## 3. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

***Суммой*** конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

Сумму двух событий обозначают символом А+В, а сумму *n* событий символом А1+А2+ … +Аn.

**Теорема сложения вероятностей.**

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

 или



**Следствие 1.** Если событие А1, А2, … ,Аn образуют полную систему, то сумма вероятностей этих событий равна единице.

.

**Следствие 2.** Сумма вероятностей противоположных событий  и  равна единице.

.

**Задача 1.** Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 20000 руб., на 10 - по 15000 руб, на 15 - по 10000 руб., на 25 - по 2000 руб. и на остальные ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 10000 руб.

Решение. Пусть А, В, и С- события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20000, 15000 и 10000 руб. так как события А, В и С несовместны, то

.

**Задача 2.** На заочное отделение техникума поступают контрольные работы по математике из городов *А, В* и *С*. Вероятность поступления контрольной работы из города *А* равна 0,6, из города *В* - 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города *С*.

Решение. События «контрольная работа поступила из города *А*», «контрольная работа поступила из города В» и «контрольная работа поступила из города С» образуют полную систему, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

, т.е. .

**Задача 3.** Вероятность того, что день будет ясным, . Найти вероятность  того, что день будет облачным.

Решение. События «день ясный» и «день облачный» противоположные, поэтому

, т.е .

## 4. Теорема умножения вероятностей независимых событий

При совместном рассмотрении двух случайных событий *А* и *В* возникает вопрос:

Как связаны события *А* и *В* друг с другом, как наступление одного из них влияет на возможность наступления другого?

Простейшим примером связи между двумя событиями служит причинная связь, когда наступление одного из событий обязательно приводит к наступлению другого, или наоборот, когда наступление одного исключает возможность наступления другого.

Для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие ***условной вероятности.***

**Определение.** Пусть *А* и *В* - два случайных события одного и того же испытания. Тогда условной вероятностью события *А* или вероятностью события А при условии, что наступило событие В, называется число .

Обозначив условную вероятность , получим формулу

, .

**Задача 1.** Вычислить вероятность того, что в семье, где есть один ребенок- мальчик, родится второй мальчик.

Решение. Пусть событие *А* состоит в том, что в семье два мальчика, а событие *В* - что один мальчик.

Рассмотрим все возможные исходы: мальчик и мальчик; мальчик и девочка; девочка и мальчик; девочка и девочка.

Тогда ,  и по формуле находим

.

Событие *А* называется ***независимым*** от события *В*, если наступление события *В* не оказывает никакого влияния на вероятность наступления события *А*.

***Теорема умножения вероятностей***

Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

.

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

.

**Задача 2.** В первой урне находится 6 черных и 4 белых шара, во второй- 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение. Пусть  - из первой урны извлечен белый шар; - из второй урны извлечен белый шар. Очевидно, что события  и  независимы.

Так как **, ,** то по формуле  находим

.

**Задача 3.** Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2; вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) оба элемента выйдут из строя; б) оба элемента будут работать.

Решение. Пусть событие *А*- выход из строя первого элемента, событие *В*- выход их строя второго элемента. Эти события независимы (по условию).

а) Одновременное появление *А* и *В* есть событие *АВ*. Следовательно,

.

б) Если работает первый элемент, то имеет место событие  (противоположное событию *А*- выходу этого элемента из строя); если работает второй элемент- событие *В.* Найдем вероятности событий  и :

;

.

Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть  и, значит,

.

**Домашнее задание:**

1. Написать конспект;
2. Решить задачи:
3. Для новогодней лотереи отпечатали 150 билетов, из которых 12 выигрышных. Какова вероятность, что купленный билет окажется выигрышным?
4. Из 1000 поступивших в магазин телевизоров 4 оказались неисправными. Какова вероятность того, что купленный Вами телевизор исправен?
5. Из 10 билетов выигрышными являются 2. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу 5 билетов, один выигрышный.
6. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада?
7. В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.