**Тема: «Бином Ньютона»**

Прочитайте выражения: (х +2у)2, (а- b)3, (c - d)2, (а+1)3, (с+3а)4, (х -2)5.

 (квадрат суммы двух выражений х и 2у; куб разности двух выражений а и b; и т.д.)

Что общего в заданных выражениях?

(каждый случай является какой либо степенью многочлена из двух выражений или степенью двучлена.)

Представьте каждую степень двучлена в виде многочлена. Какими формулами воспользуетесь?

Формулами квадрата суммы и разности, куба суммы и разности для первых четырёх примеров, для 5 и 6 придётся степень представить в виде произведения степеней и выполнить умножение многочленов.

$$\left(a+b\right)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}-квадрат суммы$$

$$\left(a-b\right)^{2}=a^{2}-2ab+b^{2}-квадрат разности$$

$$(a+b)^{3}=a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}-куб суммы$$

$$(a-b)^{3}=a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}-куб разности$$

1. (х +2у)2 = х2 +4ху + 4у2

2. (а - 2)3 = а3 - 3а2 2 +3а 22 - 23= а3 - 6а2+12а -8.

3. (c - 0,1d)2 = с2 - 0,2cd + 0,01d2.

4. (а+2у)3 = а3 + 3а22у +3а(2у)2 +(2у)3= а3 + 6а2у +12ау2 +8у3.

5. (с+а)4 = (с+а)2 (с+а)2 = (с2 +2са + а2) (с2 +2са +а2) =

= с4 + 2ас3 +а2с2 + 2ас3 +4а2с2 +2а3с +а2с2 +2а3с +а4 =

= с4+ 4с3а +6с2а2 + 4са3 +а4.

6. (х -2)5 = (х -2)3(х -2)2 = (х3 - 6х2 +12х - 8) (х2 - 4х+ 4) =

= х5 - 4х4 +4х3 - 6х4 +24х3 - 24х2 +12х3 - 48х2 + 48х - 8х2 +32х -32 =

= х5 -10х4 + 40х3 - 80х2 +80х -32. (рис. № 2)

Все случаи представляли собой степень двучлена, почему же в одних случаях пример решался легко и быстро, а в других сложно и долго?

(Выше степень двучлена, нет известной формулы сокращённого умножения для этих степеней.)

В каждом примере приходилось приводить подобные слагаемые, их количество было различным, как вы думаете, отчего зависело количество подобных слагаемых?

Логично предположить, что если есть формулы для второй и третьей степени двучлена, то возможно существует формулы и для более высоких степеней.

И количество подобных слагаемых тоже подчиняется какой-либо закономерности.

Сегодня мы рассмотрим с вами формулу бинома Ньютона и научимся с её помощью возводить в любую степень двучлен или его еще называют бином. Но прежде чем рассмотреть саму формулу, вспомним определение сочетания и формулу сочетаний, используемые в формуле бином Ньютона.

**Определение:** Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по m элементов называется любое подмножество, которое содержит m различных элементов данного множества.

Определение: Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов обозначается С, читается С из n по m, вычисляется по формуле:

С= , где n! = 1\* 2 \* 3 \* ...\* (n-2)(n-1)n (читается n-факториал).

Отметим некоторые свойства числа сочетаний:

С= С;

С= С= 1;

С= С + С , где n, r >1

Вернёмся к примеру №5: (с+а)4 = с4+ 4с3а +6с2а2 + 4са3 +а4, что означают коэффициенты перед слагаемыми?

Столько раз эти слагаемые встретились при приведении подобных слагаемых в многочлене. Количество этих слагаемых есть не что иное, как число сочетаний С, где n - степень двучлена , m - степень второго выражения.

Степень одного из множителей в одночленах с3а или са3 равна 1, количество таких слагаемых, по определению сочетания, равно С = ==4, что подтверждается вашими вычислениями. Проверим нашу гипотезу на слагаемом 6с2а2 : С = ==6, что также верно. Заметим, что первое и последнее слагаемое стоит с коэффициентом 1, так как степень одного из выражений в этом одночлене равна 0, а по свойствам сочетаний С= С= 1.

Можно проверить на известных формулах квадратов и кубов, что коэффициенты перед слагаемыми подчиняются той же закономерности.

Теперь обратим внимание на степени первого и второго выражений в одночленах, запишем ещё раз примеры №№1-6, опуская само решение:

1. (х +2у)2 = х2 +4ху + 4у2

2. (а - 2)3 = а3 - 6а2+12а -8.

3. (c - 0,1d)2 = с2 - 0,2cd + 0,01d2.

4. (а+2у)3 = а3 + 6а2у +12ау2 +8у3.

5. (с+а)4 = с4+ 4с3а +6с2а2 + 4са3 +а4.

6. (х -2)5 = х5 - 5 2 х4 + 10 22 х3 - 10 23 х2 + 5 24 х -32 =

= х5 -10х4 + 40х3 - 80х2 +80х -32.

Что вы заметили?

Объединим ваши замечания в следующие правила:

Каждый одночлен является произведением первого и второго выражения в различных степенях и некоторого числа;

Степени всех одночленов раны степени двучлена в условии;

Степень первого выражения одночлена в разложении убывает, начиная со степени двучлена и заканчивая нулевой;

Степень второго выражения одночлена в разложении возрастает, начиная с нулевой и заканчивая степенью двучлена.

Коэффициенты при слагаемых многочлена равны числу сочетаний С, где n - степень двучлена , m - переменная величина, пробегающая значения от 0 до n и соответствующая степени второго выражения.

А теперь запишем формулу бинома Ньютона - формулу представления степени двучлена в многочлен.

Определение:

Для каждого натурального числа n и произвольных чисел a и b имеет место равенство

(a+b)n = Сan+ Сan-1 b + Сan-2 b2 +...+ Сan-r br +...+ Сbn.

Равенство называется **формулой бинома Ньютона**, числа С- биномиальными коэффициентами.

Запишем пример № 6, используя бином Ньютона:

(х -2)5 = Сх5 + Сх4(-2)1 + Сх3 (-2)2 + Сх2 (-2)3 +Сх1 (-2)4 +С(-2)5=

Посчитаем биномиальные коэффициенты, используя определение и свойства числа сочетаний:

С= С=1; С= С==5; С= С===10.)

=х5 -5х4 2+ 10х322 - 10х223 +5х 24-25= х5 -10х4 + 40х3 - 80х2 +80х -32.

Как видите, мы достигли того же результата, но гораздо быстрее.

Что ещё, связанное с коэффициентами вы заметили?

Крайние коэффициенты равны 1, и все коэффициенты симметричны, относительно середины.

Добавим ещё одно правило, связанное со знаками между одночленами, в формуле бином Ньютона задана сумма, у нас же появились минусы.

Степень разности будет представлена в виде многочлена, знаки в котором чередуются, начиная со знака +, так как нечётная степень отрицательного выражения будет отрицательной, чётная степень всегда положительна.

Подведём итоги, что мы знаем о способе разложения степени двучлена в многочлен по формуле бином Ньютона.

Формула бином Ньютона имеет вид:

(a+b)n = Сan+ Сan-1 b + Сan-2 b2 +...+ Сan-r br +...+ Сbn.

Каждый одночлен является произведением первого и второго выражения в различных степенях и некоторого числа;

Степени всех одночленов раны степени двучлена в условии;

Степень первого выражения одночлена в разложении убывает, начиная со степени двучлена и заканчивая нулевой;

Степень второго выражения одночлена в разложении возрастает, начиная с нулевой и заканчивая степенью двучлена.

Коэффициенты при слагаемых многочлена равны числу сочетаний С, где n - степень двучлена , m - переменная величина, пробегающая значения от 0 до n и соответствующая степени второго выражения.

Крайние коэффициенты равны 1, и все коэффициенты симметричны, относительно середины.

Степень разности будет представлена в виде многочлена, знаки в котором чередуются, начиная со знака +, так как нечётная степень отрицательного выражения будет отрицательной, чётная степень всегда положительна.

Вы видите, насколько рационализируется работа по возведению двучлена в степень, если использовать бином Ньютона. Но на самом деле нашу работу можно ещё упростить. Достаточно долго вы вычисляли биномиальные коэффициенты, а коэффициенты - это сочетания. Посмотрите внимательно, все ли свойства сочетаний, которые были ранее введены, мы использовали?

Свойство С= С + С, где n, r >1 (1) осталось не востребованным, именно его используют при построении треугольника Паскаля.

Определение: Треугольник Паскаля - это треугольник, составленный из чисел, являющихся коэффициентами в формуле бином Ньютона.



Каждый крайний элемент равен 1, а каждый не крайний элемент равен сумме двух своих верхних соседей (свойство (1)).



Треугольник можно продолжать до бесконечности, но на практике чаще составляют таблицу для первых 10 степеней.

Треугольник Паскаля для n от 1 до 10.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 |
| 1 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2 | 1 | 2 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |   |   |   |   |   |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |   |   |   |   |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |   |   |   |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 70 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |   |   |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 126 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 |   |
| 10 | 1 | 10 | 45 | 210 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |

**Примеры:**

1. Представьте степень двучлена в виде многочлена, используя бином Ньютона и треугольник Паскаля:

а) (х+у)6

б) (1- 2а)4

Решение:

а) (х+у)6= х6 +6х5у +15х4 у2 +20х3у3 +15х2у4 +6ху5 +у6.

б) (1- 2а)4 = 1 14 (2а)0 - 4132а + 612(2а)2 - 4 11 (2а)3 + 1 10(2а)4 =

= 1 - 8а + 24а2 - 32а3 + 16а4.

2. Найти значение выражения (С+ С) : С

Решение:

 (С+ С) : С= = +=

(напомним, что =n; = .) = = 1.

**Задачи для самостоятельного решения:**

1. Представить в виде многочлена:

а) (х - 1)7

б) (2х - 7)4

2. Решить уравнение 5 С= С, используя формулу числа сочетаний.

Домашнее задание: 1) Написать краткий конспект урока в тетради;

 2) Решить задачи для самостоятельного решения в тетради.

Сфотографировать и отправить на электронную почту преподавателя olgadumnova80@mail.ru или в личные сообщения «В контакте» <https://vk.com/id407022472> Ольга Думнова